Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo da equação de Fokker-Planck para os potenciais de Hulthén e de Morse generalizado via supersimetria

Rita de Cássia dos Anjos[1]
Universidade Federal do Paraná, UFPR, Palotina, PR
Gisele Bosso de Freitas[2]
Departamento de Bioestatística, IBB-UNESP, Botucatu, SP

Resumo. Neste trabalho utiliza-se o formalismo da supersimetria em mecânica quântica para obter e estudar o comportamento das soluções analíticas da equação de Fokker-Planck para os potenciais de Hulthén e de Morse generalizado.

Palavras-chave. Fokker-Planck, Schrödinger, Hulthén, Morse generalizado, potencial.

1 Métodos e Resultados

Os potenciais de Hulthén [2] e de Morse generalizado [1] são bastante utilizados no contexto biofísico, o potencial de Hulthén, por exemplo, é utilizado para descrever interações atômicas com aplicações em física nuclear, em física do estado sólido e em fisico-química e o potencial de Morse generalizado, descreve moléculas diatômicas e modelos físicos para o DNA [3].

O formalismo da supersimetria em mecânica quântica [7], basicamente consiste em, dado um hamiltoniano da equação de Schrödinger, substituí-lo pela combinação de dois operadores diferenciais de primeira ordem. Então, dado um operador diferencial de segunda ordem (hamiltoniano), temos que encontrar dois operadores [5,6] de forma a transformar uma equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária e dessa forma encontrar as autofunções e autovalores que caracterizam o sistema estudado. Matematicamente, dado

$$H_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) = a_1^+ a_1^- + E_0^{(1)}, \tag{1}$$

em que $a^\pm$ chamados de operadores escada,são dados por

$$a^\pm = \mp\frac{d}{dx} + W_1(x) \tag{2}$$

[1]ritacassia@ufpr.br
[2]freitas.gibb@gmail.com

e $W_1(x)$ é o superpotencial. A solução geral é dada por,

$$\begin{aligned} H_n &= a_n^+ a_n^- + E_0^n, \\ a_n^\pm &= \mp \frac{d}{dx} + W_n(x), \\ \Psi_n^{(1)} &= a_1^+ a_2^+ ... a_n^+ \psi_0^{(n+1)}, E_n^{(1)} = E_0^{(n+1)}. \end{aligned} \tag{3}$$

A equação de Fokker-Planck descreve a evolução temporal da distribuição de probabilidade $P(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}[f(x,t)P(x,t)] + \frac{\Gamma}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,t), \tag{4}$$

em que Γ é a constante de difusão e $f(x)$ é a função associada ao potencial $V(x)$. Uma das maneiras de se obter a solução para a equação de Fokker-Planck é associando-a com a equação de Schrödinger, o que é bem estabelecido na literatura [4, 8]. A associação entre as equações de Fokker-Planck e Schrödinger indica que as soluções de cada uma delas pode ser obtida através da outra.

As soluções analíticas obtidas utilizando o método mostram as distribuições de probabilidade para cada potencial, indicando que o comportamento de um sistema estocástico descrito através da equação de Fokker-Planck com o potencial de Morse generalizado tem a forma de uma curva normal e para o potencial de Hulthén, de uma curva assimétrica positiva. É importante ressaltar que apesar da dependência temporal, a forma geral não é afetada.

Referências

[1] A. Del Sol Mesa et al, Generalized Morse potential: Symmetry and satellite potentials, J. Phys. A: Math. Gen., vol. 31, 321–335, (1998).

[2] E. Drigo Filho, R. M. Ricotta, Supersymmetry, variational method and Hulthén potential, Mod. Phys. Let. A, World Scientific Publishing Co, vol. 10, 1613, (1995).

[3] M. Peyrard, A. R. Bishop, Statistical mechanics of a nonlinear model for DNA denaturation,Phys. Rev. Lett., vol. 62, 2755, (1989).

[4] H. Risken, The Fokker-Planck Equation, New York, Springer, (1984).

[5] J. O. Rosas-Ortiz, On the factorization method in quantum mechanics, (A. Ballestrero, et al, eds.), 285–299, Burgos, Spain, (1999).

[6] E. Schrödinger, A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions, Proc. Roy. Irish Acad. A, vol. 46, 9–16, (1940).

[7] G. Stedman, Simple supersymmetry: II. Factorisation method in quantum mechanics, Eur. J. Phys. vol. 6, 225–231 (1985).

[8] T. Tomé, T., M. J. Oliveira, Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade, São Paulo, Edusp, (2001).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0028