Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise de Média-Variância Multiperíodo para o Erro de Rastreamento de uma Carteira

Oswaldo Luiz do Valle Costa[1]
Yeison Andrés Zabala[2]
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle, EP-USP, São Paulo, SP, Brasil.

Resumo. Este trabalho tem por objetivo derivar uma política de controle ótimo para o problema de rastreamento de carteiras multiperíodo, generalizando a formulação de média-variância uniperíodo considerada em [3].

Palavras-chave. Média-Variância, Erro de Rastreamento, Multiperíodo, Controle Ótimo.

1 Introdução

Em diversas situações o gestor financeiro é avaliado pelo desempenho do retorno total relativo a um *benchmark* pré-especificado. Portanto, a análise do erro de rastreamento de uma carteira (e.g. [3]) torna-se necessário e relevante no momento da alocação de ativos.

2 Formulação do Problema

Consideraremos um mercado financeiro composto por $n+1$ ativos de risco. O valor dos ativos será descrito pelo vetor aleatório $\bar{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix}\mathcal{S}_0 & \dots & \mathcal{S}_n\end{bmatrix}'$ tomando valores em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $t = 0, \dots, T$. Define-se a taxa de retorno como: $\bar{\boldsymbol{R}}(t)' = \begin{bmatrix}\mathcal{R}_0(t) & \boldsymbol{\mathcal{R}}(t)'\end{bmatrix}'$, $\boldsymbol{\mathcal{R}}(t)' = \begin{bmatrix}\mathcal{R}_1(t) \dots \mathcal{R}_n(t)\end{bmatrix}'$ onde $\mathcal{R}_i = S_i(t+1)/S_i(t)$. Pode-se escrever o vetor de retornos como: $\bar{\boldsymbol{R}}(t) = \bar{\boldsymbol{\eta}}(t) + \bar{\boldsymbol{Z}}(t)$, sendo $\bar{\boldsymbol{\eta}}(t)' = \begin{bmatrix}\eta_0(t) & \boldsymbol{\eta}(t)\end{bmatrix}'$, $\boldsymbol{\eta}(t)' = \begin{bmatrix}\eta_1(t) & \dots & \eta_n(t)\end{bmatrix}'$, e $\bar{\boldsymbol{Z}}(t)$ são vetores aleatórios de média nula ($E(\bar{\boldsymbol{Z}}(t)) = \boldsymbol{0}$). Tem-se que $\bar{\boldsymbol{\eta}}(t)$ são vetores determinísticos que representam a média de $\bar{\boldsymbol{R}}(t)$. Supõe-se que $\bar{Z}(t)\{t = 0, \dots, T-1\}$ são vetores aleatórios independentes, e $E(\bar{\mathcal{R}}(t)\bar{\mathcal{R}}(t)') > 0$ para cada $t = 0, \dots, T-1$. Define-se o vetor $\bar{\boldsymbol{u}}(t)' = \begin{bmatrix}u_0(t) & \boldsymbol{u}(t)'\end{bmatrix}'$, e $\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix}u_1(t) \dots, u_n(t)\end{bmatrix}'$ onde $u_i(t)$ representa o montante do capital alocado no ativo i, $i = 0, \dots, n$. O valor da carteira com o montante de capital para investimento no tempo t, denotado por $V(t)$, pode ser expresso como: $V(t) = u_0(t) + \boldsymbol{e}'\boldsymbol{u}(t)$, sendo $\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix}1 & \dots & 1\end{bmatrix}'$. Assumindo um capital inicial $V(0) = V_0 > 0$ e que a carteira seja auto-financiável, obtém-se que $V(t+1) = \mathcal{R}_0(t)V(t) + \boldsymbol{\mathcal{P}}(t)'\boldsymbol{u(t)}$, onde $\boldsymbol{\mathcal{P}}(t) = \mathcal{R}(t) - \mathcal{R}_0(t)\boldsymbol{e}$. Definindo o erro de rastreamento da carteira como $\tilde{V}(t) =$

[1]oswaldo@lac.usp.br
[2]andres.zbl@usp.br

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.

$V(t) - V^B(t)$ e $\tilde{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}^B(t)$ (as variáveis correspondentes ao *benchmark* são sobrescritas com a letra B), o problema a resolver $(PE(\sigma))$ é expresso da seguinte forma. $\boldsymbol{PE(\sigma)}$: $\max\limits_{\boldsymbol{u}} E(\tilde{V}(T))$ sujeito a $\{Var(\tilde{V}(T)) \leq \boldsymbol{\sigma^2}$, $\tilde{V}(t+1) = \mathcal{R}_0(t)\tilde{V}(t) + \boldsymbol{\mathcal{P}}(t)'\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$, $\tilde{V}(0) = 0$, $t = 0, 1, \ldots, T-1\}$.

3 Solução do Problema

A solução analítica de $PE(\sigma)$ é difícil de ser encontrada diretamente dada a não-separabilidade no sentido da programação dinâmica. Portanto, é formulado um problema auxiliar separável, onde sua solução corresponde à solução de $PE(\sigma)$ sob umas condições específicas (ver derivação em [1]). Apresenta-se a solução, na qual será preciso definir, $\boldsymbol{\phi}(t) = E(\boldsymbol{\mathcal{P}}(t)\boldsymbol{\mathcal{P}}(t)')$, $\varphi_0^2(t) = E(\mathcal{R}_0(t)^2)$ e $\boldsymbol{\varphi}(t) = E(\mathcal{R}_0(t)\boldsymbol{\mathcal{P}}(t))$. Em função destes termos temos: $A_2(t) = \varphi_0^2(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)'\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{t})^{-1}\boldsymbol{\varphi}(t) > 0$, $A_1(t) = \eta_0(t) - (\boldsymbol{\eta}(t) - \eta_0(t)\boldsymbol{e})'\boldsymbol{\phi}(t)^{-1}\boldsymbol{\varphi}(t)$ e $\mathcal{B}(t) = (\boldsymbol{\eta}(t) - \eta_0(t)\boldsymbol{e})'\boldsymbol{\phi}(t)^{-1}(\boldsymbol{\eta}(t) - \eta_0(t)\boldsymbol{e}) \leq 1$. Definiremos também as seguintes variáveis recursivas: $\Gamma_2(t) = A_2(t)\Gamma_2(t+1) > 0$ com $\Gamma_2(T) = 1$; $\Gamma_1(t) = A_1(t)\Gamma_1(t+1)$, com $\Gamma_1(T) = 1$; e $\Gamma_0(t) = \Gamma_0(t+1) + (\Gamma_1(t+1)^2/\Gamma_2(t+1))\mathcal{B}(t)$, com $\Gamma_0(T) = 0$. Ainda será necessário definir $\mathcal{C} = (1/2)\sum_{t=0}^{T-1}\left(\Gamma_1(t+1)^2/\Gamma_2(t+1)\right)\mathcal{B}(t)$. Os seguintes termos também são introduzidos: $a = \mathcal{C}/2 - \mathcal{C}^2$; $b = \Gamma_1(0)\mathcal{C}/a$; e por último, $c = \Gamma_2(0) - ab^2 - \Gamma_1(0)^2$. Então, para o problema $PE(\sigma)$ obtemos que o controle ótimo é dado por (ver [1] com condição inicial em 0): $\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{K}(t)(V(t) - V^B(t)) + (\sigma/\sqrt{a})\boldsymbol{\vartheta}(t) + \boldsymbol{u}^B(t)$,
onde $\boldsymbol{K}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)^{-1}\boldsymbol{\varphi}(t)$ e $\boldsymbol{\vartheta}(t) = (1/2)\left(\Gamma_1(t+1)/\Gamma_2(t+1)\right)\boldsymbol{\phi}(t)^{-1}(\boldsymbol{\eta}(t) - \eta_0(t)\boldsymbol{e})$. Finalmente, obtém-se a fronteira eficiente do erro de rastreamento, i.e, (ver de novo [1] com condição inicial em 0) $Var(V(T) - V^B(T)) = \left(E(V(T) - V^B(T))\right)^2 a/\mathcal{C}^2$.

4 Conclusão

Neste trabalho foi generalizado (cenário multiperíodo) os resultados obtidos em [3]. Uma estratégia ótima de investimento para o problema $PE(\sigma)$ foi analiticamente obtida em forma fechada com a identificação explícita para a fronteira eficiente.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq e à CAPES pelo financiamento.

Referências

[1] D. Li and W.L. Ng, Optimal dynamic portfolio selection: Multi–period mean-variance formulation, Mathematical Finance, vol. 10, 387-406, (2000).

[2] H. Markowitz, Portfolio selection, The Journal of Finance, vol. 7, 77-91, (1952).

[3] R. Roll, A mean/variance analysis of tracking error, Journal of Portfolio Management, vol. 18, 13-22, (1992).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0030