

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

## Equilíbrio e estabilidade de soluções do modelo de Solow com mão-de-obra logística e migração

Raul Oliveira Ribeiro<sup>1</sup>

Centro de Tecnologia de Alegrete, UNIPAMPA, Alegrete, RS

João Plínio Juchem Neto<sup>2</sup>

Centro de Tecnologia de Alegrete, UNIPAMPA, Alegrete, RS

**Resumo.** O trabalho tem como objetivo introduzir migração no modelo de crescimento econômico de Solow [1], modelo que leva em consideração dois fatores de produção: capital, representando maquinário, ferramentas, etc. e mão-de-obra, englobando a quantidade de trabalhadores empregados no processo produtivo. Matematicamente, o modelo é formulado como um sistema acoplado de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. A primeira, governa a evolução temporal do estoque de capital, onde considera-se uma função de produção Cobb-Douglas e uma depreciação do capital à taxa constante,

$$K'(t) = sAK^\phi L^{1-\phi} - \delta K \quad (1)$$

onde o fator constante  $A$  é uma variável exógena, representando o nível tecnológico da economia,  $s$  e  $\delta$ , respectivamente, são taxas de poupança e depreciação constantes. Então, o termo  $sAK^\phi L^{1-\phi}$  descreve o investimento bruto, e  $\delta K$  é a depreciação do capital. Em sua formulação original, a força de trabalho segue a Lei Malthusiana:

$$L'(t) = \alpha L, \quad L(t) = L_0 e^{\alpha t} \quad (2)$$

sendo  $L_0$  a população inicial de trabalhadores.

Em [2], Mingari Scarpello e Ritelli mostraram um modelo onde a força de trabalho é descrita para o caso da equação logística (Verhulst), onde ao longo do tempo, a força de trabalho tende a se estabilizar em um ponto de equilíbrio:

$$L'(t) = \alpha L - \beta L^2, \quad L_\infty = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (3)$$

No presente trabalho introduzimos migração no modelo de Solow com a força de trabalho logística, analisando o impacto da migração nos níveis de longo do prazo de capital e mão-de-obra atingidos pela economia. Foram considerados na mão-de-obra dois diferentes termos de migração:

---

<sup>1</sup>Graduando em Engenharia Elétrica. E-mail: raul.oliveira.ribeiro@gmail.com

<sup>2</sup>Professor no CTA da UNIPAMPA. E-mail: plinio@unipampa.edu.br

- (i) Proporcional ao capital existente na economia, onde supõe-se que o capital é atrator de mão-de-obra do exterior

$$L'(t) = \alpha L - \beta L^2 + mK, \quad m > 0; \quad (4)$$

- (ii) Proporcional à mão-de-obra existente na economia, onde níveis baixos de capital atraem mão-de-obra, tendo-se assim imigração, e níveis muito altos de capital pou-pam mão-de-obra, causando sua emigração

$$L'(t) = \alpha L - \beta L^2 + (a - bK)L, \quad a, b > 0. \quad (5)$$

No desenvolvimento do projeto, primeiramente foi encontrada as soluções de equilíbrio do sistema:

(i)

$$K_\infty = \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{\delta}{sA} \right)^{-\frac{1}{1-\phi}} + \frac{m}{\beta} \left( \frac{\delta}{sA} \right)^{-\frac{2}{1-\phi}}, \quad L_\infty = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{m}{\beta} \left( \frac{\delta}{sA} \right)^{-\frac{1}{1-\phi}} \quad (6)$$

(ii)

$$K_\infty = \frac{\alpha + a}{\beta \left( \frac{\delta}{sA} \right)^{-\frac{1}{\phi-1}} + b}, \quad L_\infty = \frac{\alpha + a}{\beta + b \left( \frac{\delta}{sA} \right)^{\frac{1}{\phi-1}}} \quad (7)$$

Posteriormente, foi feita a análise de estabilidade linear [3] em torno deste equilíbrio, onde foi comprovado que o equilíbrio é estável, apresentando convergência monotônica, caso (i), ou oscilante, caso (ii). Finalmente, foi confirmado tal resultado analítico através de simulações numéricas, tendo-se utilizado o Método de Euler. Destaca-se como conclusões obtidas: para o caso (i), uma maior taxa de migração implica que a economia converge para níveis maiores de capital e mão-de-obra, quando comparados com o modelo sem migração; já para o caso (ii), quanto maior o nível crítico de capital, a partir do qual ele começa a poupar mão-de-obra, maiores os níveis de capital e mão-de-obra atingidos no longo prazo. Trabalhos futuros considerarão outros tipos de migração no modelo de Solow.

**Palavras-chave.** Modelo de Solow, Dinâmica Não-Linear, Estabilidade Linear

## Referências

- [1] R. Solow, A contribution to the theory of economic growth, Quarterly Journal of Economics, Vol 70, 65-94, Feb (1956).
- [2] G. M. Scarpello and D. Ritelli, The Solow Model Improved Through the Logistic Manpower Growth Law, Annali Universita di Ferrara - Sez 7 - Sc. Mat., Vol 2, 73-83, (2003).
- [3] H. S. Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Westview press, (2014).