Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Polinômios Ortogonais no Círculo Unitário : Coeficientes de Verblunsky Associados a Sequências Reais de Sinal Alternante

Cleonice F. Bracciali[1]
Departamento de Matemática Aplicada, UNESP, São José do Rio Preto, SP
Jairo S. Silva[2]
Pós-Graduação em Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, SP
A. Sri Ranga[3]
Departamento de Matemática Aplicada, UNESP, São José do Rio Preto, SP
Daniel O. Veronese[4]
Pós-Graduação em Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, SP

Resumo. Recentemente, foi mostrado em [5] que associado ao par de sequências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$, com $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência encadeada positiva, existe uma única medida de probabilidade não trivial μ no círculo unitário. Mostrou-se também que os coeficientes de Verblunsky $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, associados aos polinômios ortogonais com respeito a μ, podem ser relacionados diretamente com tais sequências. Neste trabalho, consideramos esta relação e suas consequências quando impomos uma restrição de sinal sobre a sequência $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Precisamente, quando a sequência $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ tem uma propriedade de sinal alternante, usamos informações sobre os zeros de certos polinômios para-ortogonais para estimar o suporte da medida associada.

Palavras-chave. Polinômios para-ortogonais, Medidas de probabilidade, Sequências encadeadas positivas, Sequências de sinal alternante.

1 Introdução

Polinômios ortogonais no círculo unitário (OPUC) tem sido comumente conhecido como polinômios de Szegő em homenagem a Gábor Szegő que os apresentou na primeira metade do século 20. Por causa de suas aplicações em regras de quadratura, processamento de sinais, teoria espectral e muitos outros tópicos, estes polinômios têm recebido muita

[1]cleonice@ibilce.unesp.br
[2]jairomath@hotmail.com
[3]ranga@ibilce.unesp.br
[4]doveronese@yahoo.com.br

atenção nos últimos anos (veja, por exemplo, [2, 6, 8, 11]). Para textos mais recentes sobre tais polinômios nos referimos aos dois volumes de Simon [9, 10].

Dada uma medida de probabilidade não trivial $\mu(z) = \mu(e^{i\theta})$ no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, a sequência associada de OPUC $\{S_n\}$ pode ser definida por

$$\int_{\mathcal{C}} \bar{z}^j S_n(z) d\mu(z) = \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta} S_n(e^{i\theta}) d\mu(e^{i\theta}) = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad n \geq 1.$$

Fazendo $\kappa_n^{-2} = \|S_n\|^2 = \int_{\mathcal{C}} |S_n(z)|^2 d\mu(z)$, os polinômios ortonormais no círculo unitário são $s_n(z) = \kappa_n S_n(z)$, $n \geq 0$.

Os OPUC mônicos satisfazem as relações de recorrência

$$\begin{aligned} S_n(z) &= zS_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}\, S_{n-1}^*(z), \\ S_n(z) &= (1 - |\alpha_{n-1}|^2) z S_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1} S_n^*(z), \end{aligned} \quad n \geq 1, \tag{1}$$

onde $\alpha_{n-1} = -\overline{S_n(0)}$ e $S_n^*(z) = z^n \overline{S_n(1/\bar{z})}$ denota o polinômio revertido (recíproco) de $S_n(z)$. Os números α_n, nos últimos anos, têm sido referidos como coeficientes Verblunsky. Sabe-se que esses coeficientes são tais que $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$. Além disso, os OPUC e a medida associada são completamente determinados a partir desses coeficientes (veja por exemplo [9], Theorem 1.7.11).

Foi mostrado em [5] que, dada qualquer medida de probabilidade não trivial no círculo unitário, então correspondente a esta medida, existe um par de sequências reais $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, onde $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva. No Teorema 2.1 fornecemos informações completas sobre esta afirmação e sua recíproca. Para ser mais preciso, as sequências $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ são os coeficientes da fórmula de recorrência de três termos

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})] R_n(z) - 4d_{n+1} z R_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \tag{2}$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$, onde

$$R_n(z) = \frac{\prod_{j=1}^{n} \left[1 - \tau_{j-1}\alpha_{j-1}\right]}{\prod_{j=1}^{n} \left[1 - \mathcal{R}e(\tau_{j-1}\alpha_{j-1})\right]} \frac{zS_n(z) - \tau_n S_n^*(z)}{z - 1},$$

com $\tau_n = S_n(1)/S_n^*(1)$, $n \geq 0$.

Dado o par de sequências reais $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, é possível recuperar a medida de probabilidade associada a este par, considerando certas funções racionais que seguem da fórmula de recorrência (2). Em [3], usando argumentos padrão envolvendo frações contínuas, expansões em séries no infinito e na origem e o teorema da Seleção de Helly, a medida associada μ é dada como um limite de uma subsequência de medidas discretas $\psi_n(e^{i\theta})$ cujos pontos puros (aqueles que são diferentes de $z = 1$) são exatamente os zeros de $R_n(z)$. Os resultados apresentados em [3] nos permite dar informações sobre o suporte da medida μ estudando os zeros $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, $j = 1, 2 \ldots, n$, de $R_n(z)$, ou, equivalentemente, estudando os zeros das funções $W_n(x)$, dadas por

$$W_n(x) = 2^{-n} e^{-in\theta/2} R_n(e^{i\theta}), \quad n \geq 0, \tag{3}$$

onde $x = \cos(\theta/2)$. A sequência de funções $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz a fórmula de recorrência de três termos (veja [1, 7])

$$W_{n+1}(x) = \left(x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2}\right) W_n(x) - d_{n+1}\, W_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{4}$$

com $W_0(x) = 1$ e $W_1(x) = x - c_1\sqrt{1-x^2}$.

Em [7], prova-se que, para qualquer $n \geq 1$, W_n tem exatamente n zeros distintos $x_{n,j} = \cos(\theta_{n,j}/2)$, $j = 1, 2 \ldots, n$, em $(-1, 1)$, os quais satisfazem a propriedade de entrelaçamento

$$-1 < x_{n+1,n+1} < x_{n,n} < x_{n+1,n} < \cdots < x_{n,1} < x_{n+1,1} < 1, \quad n \geq 1, \tag{5}$$

isto é, entre dois zeros consecutivos de W_{n+1} existe um zero de W_n.

O objetivo deste trabalho é estudar sequências de coeficientes de Verblunsky onde a sequência relacionada $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ tem uma restrição de sinal. Mostramos que, sobre certas condições, é possível estimar o suporte da medida associada.

2 Resultados Preliminares

Nesta seção, apresentamos alguns resultados sobre medidas de probabilidade não triviais e sequências encadeadas (para mais detalhes sobre sequências encadeadas veja, por exemplo, [4]). Iniciamos com um teorema estabelecido em [5] que fornece uma caracterização para medidas de probabilidade não triviais em termos de duas sequências reais.

Teorema 2.1. *(a) Dada uma medida de probabilidade não trivial μ sobre o círculo unitário, então associado com esta, existe um único par de sequências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$, onde $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é também uma sequência encadeada positiva. Especificamente, se $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequência associada de coeficientes de Verblunsky e se a sequência τ_n é tal que*

$$\tau_0 = 1 \quad e \quad \tau_n = \tau_{n-1}\frac{1 - \overline{\tau}_{n-1}\overline{\alpha}_{n-1}}{1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

então $m_0 = 0$,

$$c_n = \frac{-Im(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}{1 - Re(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})} \quad e \quad m_n = \frac{1}{2}\frac{|1 - \tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2}{[1 - Re(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})]}, \quad n \geq 1,$$

onde $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequência minimal de parâmetros de $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$. Além disso, a sequência maximal de parâmetros $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$é tal que M_0 é o valor do salto na medida em $z = 1$.

(b) Reciprocamente, dado um par de sequências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$, onde $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é também uma sequência encadeada positiva, então, associado com este par, existe uma única medida de probabilidade não trivial μ suportada no círculo unitário. Especificamente, se $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequência minimal de parâmetros de $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, então $\tau_0 = 1$,

$$\tau_{n-1}\alpha_{n-1} = \frac{1 - 2m_n - ic_n}{1 - ic_n} \quad e \quad \tau_n = \frac{1 - ic_n}{1 + ic_n}\tau_{n-1}, \quad n \geq 1. \tag{6}$$

Além disso, a medida tem um salto M_0 em $z = 1$, onde $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequência maximal de parâmetros de $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$.

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0010

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.

Agora, apresentamos um teorema que fornece uma relação entre os zeros dos polinômios $R_n(z)$ e a medida associada com o par de sequências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$. O mesmo é uma consequência imediata de resultados obtidos em [3].

Teorema 2.2. *Seja $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ um par de sequências reais, com $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência encadeada positiva. Além disso, seja $R_n(z)$ a sequência de polinômios dada por (2) e μ a medida associada com este par de sequências. Mais ainda, suponha que os zeros de $R_n(z)$ estejam sobre um arco fechado $\mathcal{B}$ do círculo unitário, para todo $n \geq 1$. Então, o suporte da medida μ se encontra dentro de $\mathcal{B} \cup \{1\}$.*

3 Estimativas para o Suporte de Medidas Associadas com Sequências $\{c_n\}$ de Sinal Alternante

Primeiro, estabelecemos dois lemas utilizados para obter os resultados subsequentes.

Lema 3.1. *Seja $W_n(x)$ satisfazendo (4) e $R_n(z)$ satisfazendo (2). Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $c_n = (-1)^n c$, $n \geq 1$ *e* $c \in \mathbb{R}$;

(ii) $R_{2n}(z)$ *é real e* $R_{2n+1}(z) = [(1-ic)z + (1+ic)]\,\widetilde{R}_{2n}(z)$ *com* $\widetilde{R}_{2n}(z)$ *real para* $n \geq 0$;

(iii) $W_{2n}(x)$ *é um polinômio par de grau* $2n$ *e* $W_{2n+1}(x) = \left(x + c\sqrt{1-x^2}\right)\widetilde{W}_{2n}(x)$ *com* $\widetilde{W}_0(x) = 1$ *e* $\widetilde{W}_{2n}(x)$ *um polinômio par de grau* $2n$*, para* $n \geq 0$.

Demonstração. (i)⇒(ii) Como $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = [(1-ic)z + (1+ic)]\,\widetilde{R}_0(z)$, com $\widetilde{R}_0(z) = 1$, o resultado ocorre se $n = 0$.

Além disso, aplicando-se a relação de recorrência de três termos (2) para $R_2(z)$ vemos facilmente que $R_2(z)$ é um polinômio real. Usando novamente a relação de recorrência para $R_3(z)$ e a hipótese (i), obtemos $R_3(z) = [(1-ic)z + (1+ic)]\,\widetilde{R}_2(z)$, com $\widetilde{R}_2(z) = R_2(z) - 4d_3 z$ um polinômio real. Assim, o resultado também ocorre se $n = 1$. Continuando-se da mesma maneira, o resultado segue facilmente por indução matemática.

(ii)⇒(iii) Por (ii), $R_{2n}(z)$ é real para todo $n \geq 0$, daí seu coeficiente líder $r_{2n,2n} = \prod_{j=1}^{2n}(1 + ic_j)$ também é real. Logo, $(1 + ic_{2n+1})(1 + ic_{2n+2}) \in \mathbb{R}$, e consequentemente,

$$c_{2n+2} = -c_{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad . \tag{7}$$

Para $n = 0$, fazendo $c_1 = -c$ temos $W_1(x) = (x + c\sqrt{1-x^2}\,)\widetilde{W}_0(x)$, com $\widetilde{W}_0(x) = 1$. Assim, o resultado ocorre para $n = 0$. Além disso, por (7), $c_2 = c$.

Para $n = 1$, usando-se a relação de recorrência de três termos (4) para $W_2(x)$ vemos que $W_2(x)$ é um polinômio par de grau 2. Novamente, pela relação de recorrência de três termos (4) para $W_3(x)$, temos $W_3(x) = (x - c_3\sqrt{1-x^2}\,)W_2(x) - d_3 W_1(x)$. Por outro lado, como $\widetilde{z} = -\frac{1+ic}{1-ic}$ é um zero de $R_3(z)$, pela relação (3) vemos que $\widetilde{x} = -\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ é um zero de $W_3(x)$. Note que $\widetilde{x}$ é também um zero de $W_1(x)$. Daí, $(\widetilde{x} - c_3\sqrt{1-\widetilde{x}^{\,2}}\,)W_2(\widetilde{x}) = 0$. Mas, pela propriedade de entrelaçamento dos zeros, $W_2(\widetilde{x}) \neq 0$ e portanto $\widetilde{x} - c_3\sqrt{1-\widetilde{x}^{\,2}} = 0$. Assim,

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0010

vemos que $c_3 = -c$ e, consequentemente, $W_3(x) = (x + c\sqrt{1-x^2})\widetilde{W}_2(x)$, onde $\widetilde{W}_2(x) = W_2(x) - d_3$ é um polinômio par de grau 2. Logo o resultado ocorre para $n = 1$. Usando argumentos análogos, podemos obter o resultado desejado usando indução matemática.

(iii)⇒(i) Usando a hipótese (iii) e a definição de $W_1(x)$ é fácil ver que $c_1 = -c$. Além disso, como $W_2(x)$ é par, usando (4) vemos que a função $(x - c_2\sqrt{1-x^2})W_1(x)$ também é par. Daí, $c = c_2$. Agora, de $W_3(x) = (x + c\sqrt{1-x^2})\widetilde{W}_2(x)$ e pela relação de recorrência para $W_3(x)$ observamos que as funções $f(x) = (x - c_3\sqrt{1-x^2})W_2(x)$ e $h(x) = -d_3(x + c\sqrt{1-x^2})$ devem ter um fator comum. Mas, sendo $W_2(x)$ um polinômio de grau 2 isto só pode ocorrer se $c_3 = -c$. Continuando com o mesmo procedimento, podemos obter o resultado desejado. □

Considere agora os polinômios $\hat{R}_n(z)$ satisfazendo

$$\hat{R}_{n+1}(z) = [(1 + i\hat{c}_{n+1})z + (1 - i\hat{c}_{n+1})]\hat{R}_n(z) - 4d_{n+1}z\hat{R}_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \tag{8}$$

com $\hat{R}_0(z) = 1$, $\hat{R}_1(z) = (1 + i\hat{c}_1)z + (1 - i\hat{c}_1)$ e $\hat{c}_n = -c_n$.

Lema 3.2. *Seja $R_n(z)$ satisfazendo (2) e $\hat{R}_n(z)$ satisfazendo (8). Então, $R_n(z) = \overline{\hat{R}_n(\bar{z})}$, para todo $n \geq 0$.*

Demonstração. A prova pode ser dada por indução matemática. Claramente, o resultado ocorre parar $n = 0$ e $n = 1$. Suponha que o resultado é válido para $n = 0, 1, \ldots, k$. Então, das relações de recorrência (2) e (8), temos

$$\begin{aligned} \hat{R}_{k+1}(\bar{z}) &= [(1 - ic_{k+1})\bar{z} + (1 + ic_{k+1})]\hat{R}_k(\bar{z}) - 4d_{k+1}\bar{z}\hat{R}_{k-1}(\bar{z}) \\ &= [(1 - ic_{k+1})\bar{z} + (1 + ic_{k+1})]\overline{R_k(z)} - 4d_{k+1}\bar{z}\overline{R_{k-1}(z)}. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue tomando o conjugado complexo na relação acima. □

Observação 3.1. *O Lema 3.2 fornece uma relação entre os zeros dos polinômios $R_n(z)$ e os zeros de $\hat{R}_n(z)$, isto é, se $z_{n,j}$ é um zero de $R_n(z)$ então $\overline{z}_{n,j}$ é um zero de $\hat{R}_n(z)$.*

Agora, consideramos o problema de fornecer estimativas para o suporte de medidas cujas sequências associadas $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ são de sinal alternante, isto é, $c_n = (-1)^n\widetilde{c}_n$, com $\{\widetilde{c}_n\}$ sendo qualquer sequência de números reais positiva (ou negativa).

Seja $\mathcal{C}_1 = \left\{z = e^{i\theta} \,:\, 0 \leq \theta \leq \arccos\left(\frac{c^2-1}{c^2+1}\right)\right\}$ e $\mathcal{C}_2 = \left\{z = e^{i\theta} \,:\, 2\pi - \arccos\left(\frac{c^2-1}{c^2+1}\right) \leq \theta \leq 2\pi\right\}$ Iniciamos com o caso $c_n = (-1)^n c$, onde $c \in \mathbb{R}^*$.

Teorema 3.1. *Seja μ a medida de probabilidade no círculo unitário associada com o par de sequências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ onde $c_n = (-1)^n c$, $c \in \mathbb{R}^*$ e $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva. Então, o suporte de μ se encontra dentro de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $c > 0$. Pelo Teorema 2.2, basta provar que todos os zeros de $R_n(z)$, dado por (2), estejam sobre $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Para isto, usaremos as funções $W_n(x)$, dadas por (4), que estão associados aos polinômios $R_n(z)$.

Pelo Lema 3.1 temos $W_{2n+1}(x) = \left(x + c\sqrt{1-x^2}\right)\widetilde{W}_{2n}(x)$ com $\widetilde{W}_{2n}(x)$ um polinômio par de grau $2n$. Além disso, $W_{2n}(x)$ é também um polinômio par de grau $2n$. Isto significa

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0010

que $\frac{-c}{\sqrt{1+c^2}}$ é sempre um zero de $W_{2n+1}(x)$ e os outros $2n$ zeros destas funções tem uma simetria em relação a origem. Da mesma forma, todos os zeros de $W_{2n}(x)$ são simétricos com relação a origem. Portanto, desta simetria dos zeros e tendo em conta a propriedade de entrelaçamento dos zeros de $W_n(x)$ podemos concluir que todos os seus zeros pertencem ao conjunto $\left(-1, \frac{-c}{\sqrt{1+c^2}}\right] \cup \left[\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, 1\right)$. Se denotarmos os zeros de $W_n(x)$ por $x_{n,j}$ e os zeros de $R_n(z)$ por $z_{n,j}$, então estes zeros são relacionados por $x_{n,j} = \cos\left(\frac{\theta_{n,j}}{2}\right)$, onde $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Isto mostra que todos os zeros de $R_n(z)$ estão dentro de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. □

Observação 3.2. *Observe que o Teorema 3.1 fornece uma estimativa para o suporte da medida no caso de $c_n = (-1)^n\tilde{c}_n$, com $\tilde{c}_n$ sendo uma sequência constante. Usamos esta estimativa inicial para obter um resultado mais geral, dado a seguir.*

Teorema 3.2. *Seja μ a medida de probabilidade no círculo unitário associada com o par de sequências reais $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$, onde $c_n = (-1)^n\tilde{c}_n$, $\tilde{c}_n \geq c > 0$, $c \in \mathbb{R}$ e $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva. Então, o suporte de μ se encontra dentro de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.*

Demonstração. Inicialmente, note que para todo ε com $0 < \varepsilon < c$, temos $\tilde{c}_n \geq c > c_\varepsilon > 0$, onde $c_\varepsilon = c - \varepsilon$. Daí, se $x_0 = \frac{-c_\varepsilon}{\sqrt{1+c_\varepsilon^2}}$ e $x_1 = \frac{c_\varepsilon}{\sqrt{1+c_\varepsilon^2}}$ pode-se mostrar que, para todo $n \geq 1$,

$$\operatorname{sign}\left(x_0 - \tilde{c}_n\sqrt{1-x_0^2}\right) = \operatorname{sign}\left(x_1 - \tilde{c}_n\sqrt{1-x_1^2}\right) = -1 \tag{9}$$

e

$$\operatorname{sign}\left(x_0 + \tilde{c}_n\sqrt{1-x_0^2}\right) = \operatorname{sign}\left(x_1 + \tilde{c}_n\sqrt{1-x_1^2}\right) = 1. \tag{10}$$

Agora, notando que $\frac{-\tilde{c}_1}{\sqrt{1+\tilde{c}_1^2}}$ é o único zero de $W_1(x)$ em $(-1, 1)$ e que $\tilde{c}_1 > c$, então o resultado ocorre para $n = 1$. Além disso, de (10), $\operatorname{sign}(W_1(x_j)) = 1$, $j \in \{0, 1\}$.

Assim, a partir da relação de recorrência de três termos (4) para $W_2(x)$ e de (9) concluímos que $\operatorname{sign}(W_2(x_j)) = -1$, $j \in \{0, 1\}$. Suponha, por absurdo, que existe pelo menos um zero de $W_2(x)$ dentro do intervalo (x_0, x_1), então, como $W_2(x_0) < 0$ e $W_2(x_1) < 0$ concluímos que $W_2(x)$ tem dois zeros em (x_0, x_1). Mas isso não pode ocorrer, pois o único zero de $W_1(x)$ está fora de (x_0, x_1) e este zero se entrelaça com os dois zeros de $W_2(x)$. Logo, o resultado também ocorre para $n = 2$.

Novamente, da relação de recorrência para $W_3(x)$, $\operatorname{sign}(W_2(x_j)) = -1$, $\operatorname{sign}(W_1(x_j)) = 1$, $j \in \{0, 1\}$, e por (10) temos que $\operatorname{sign}(W_3(x_j)) = -1$, $j \in \{0, 1\}$. Portanto, usando a propriedade de entrelaçamento para os zeros de $W_3(x)$ e $W_2(x)$, e o fato que não existe nenhum zero de $W_2(x)$ em (x_0, x_1), podemos concluir que $W_3(x)$ não se anula em (x_0, x_1).

Continuando este procedimento, por indução, pode-se mostrar que

$$\operatorname{sign}(W_n(x_j)) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}, \ \ j \in \{0, 1\}, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

e, pelos mesmos argumentos usados antes, $W_n(x)$ não se anula em (x_0, x_1). Finalmente, fazendo $\varepsilon \to 0$, vemos que $W_n(x)$ tem todos os seus zeros em $\left(-1, \frac{-c}{\sqrt{1+c^2}}\right] \cup \left[\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, 1\right)$. Isto completa a prova, como no teorema anterior. □

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0010

Corolário 3.1. *Seja* μ *a medida de probabilidade no círculo unitário associada com o par de sequências reais* $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$*, onde* $c_n = (-1)^n \tilde{c}_n$*,* $\tilde{c}_n \leq c < 0$*,* $c \in \mathbb{R}$ *e* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência encadeada positiva. Então, o suporte de* μ *se encontra dentro de* $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$*.*

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 3.2 e do Lemma 3.2. □

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES, CNPq e FAPESP, pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

Referências

[1] C. F. Bracciali, J.H. McCabe, T.E. Peréz and A. Sri Ranga, A class of orthogonal functions given by a three term recurrence formula, Math. Comp., (2015), (to appear).

[2] J. Breuer, E. Ryckman and B. Simon, Equality of the spectral and dynamical definitions of reflection, Comm. Math. Phys., vol. 295, 531-550, (2010).

[3] K. Castillo, M. S. Costa, A. Sri Ranga and D. O. Veronese, A Favard type theorem for orthogonal polynomials on the unit circle from a three term recurrence formula, J. Approx. Theory, vol. 184, 146-162, (2014).

[4] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, (1978).

[5] M. S. Costa, H. M. Felix and A. Sri Ranga, Orthogonal polynomials on the unit circle and chain sequences, J. Approx. Theory, vol. 173, 14-32, (2013).

[6] M. S. Costa, E. Godoy, R. L. Lamblém and A. Sri Ranga, Basic hypergeometric functions and orthogonal Laurent polynomials, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 140, 2075-2089, (2011).

[7] D. K. Dimitrov and A. Sri Ranga, Zeros of a family of hypergeometric para-orthogonal polynomials on the unit circle, Math. Nachr., vol. 286, 1778-1791, (2013).

[8] F. Peherstorfer, Positive trigonometric quadrature formulas and quadrature on the unit circle, Math. Comp., vol. 80, 1685-1701, (2011).

[9] B. Simon, Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1. Classical Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 54, part 1, (2005).

[10] B. Simon, Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 2. Spectral Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 54, part 2, (2005).

[11] S. Tsujimoto and A. Zhedanov, Elliptic hypergeometric Laurent biorthogonal polynomials with a dense point spectrum on the unit circle, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., vol. 5, 30, (2009).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0010