

# Modelagem e Escoamento do Tráfego de Veículos em uma Pista Simples

**Rudinei L. Bogo,**      **Liliana M. Gramani,**

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, CESEC, UFPR,  
Curitiba, PR

E-mail: rudi.bogo@gmail.com, l.gramani@gmail.com,

**Eloy Kaviski**

Departamento de Hidráulica e Saneamento

Centro Politécnico

Curitiba, PR

E-mail: eloydhs@ufpr.br.

**Resumo:** *O aumento significativo no fluxo do tráfego de veículos tem causado diversos problemas para a sociedade. O estudo das características do tráfego de veículos tem se tornado uma ferramenta importante para avaliar e planejar as rodovias. Nesse contexto, a simulação computacional via autômatos celulares pode ser utilizada como uma importante ferramenta para obtenção de características fundamentais do tráfego em rodovias ou em áreas urbanas. Neste trabalho, desenvolveu-se um modelo de autômatos celulares que utilizam regras simples de movimentação dos veículos, para analisar o tempo de escoamento de uma pista simples. A partir dos dados obtidos, formulou-se um modelo de regressão polinomial que relaciona o tempo médio total de escoamento e o número de veículos. Os resultados apresentados mostraram-se bastante satisfatórios e podem ser usados para desenvolver ferramentas de controle ou informação sobre o tráfego.*

**Palavras-chave:** *Tráfego de Veículos, Autômatos Celulares, Regressão Polinomial 3*

## 1 Introdução

Os primeiros estudos sobre teorias do fluxo do tráfego de veículos começaram a ser desenvolvidos na década de 30, com o trabalho de Bruce Greenshields, que relacionou grandezas como: fluxo, densidade e velocidade [7], e a aplicação da teoria de probabilidades para tentar descrever o fluxo de tráfego [1]. Desde então, vários estudos têm sido feitos na tentativa de descrever a relação entre veículos, via, semáforos e outros componentes do trânsito, utilizando esses conceitos [6].

A modelagem nesse tipo de estudo requer as mais diversas variáveis que geram grande complexidade e esforço computacional. Por exemplo, um modelo matemático para o tráfego pode conter até 30 mil equações e envolver até um milhão de variáveis, exigindo grandiosos recursos computacionais para a sua utilização [15]. Nesse sentido, os fenômenos comportamentais que requerem muitas variáveis ou componentes, acabam tornando o sistema complexo o bastante para utilizar mecanismos matemáticos comuns. Sendo assim, a modelagem computacional, via Autômatos Celulares, pode ser amplamente utilizada já que possuem uma natureza muito mais simples do que, por exemplo, as equações diferenciais parciais [18].

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver um modelo matemático de simulação de escoamento de uma pista simples, que permita relacionar o tempo médio total de escoamento com aumento significativa do número de veículos e numa situação de congestionamento. A formulação do modelo tem por base a teoria dos autômatos celulares, amplamente utilizada no

estudo de tráfego de veículos, e a aplicação das técnicas da análise de regressão, que buscam o melhor ajuste de um modelo a um conjunto de dados.

## 2 Autômatos Celulares

Os autômatos celulares, com o avanço das novas tecnologias, tem sido muito úteis em diversos campos de estudos, como por exemplo: incêndios florestais [9], na biologia [12], no reconhecimento de padrões [5], no crescimento de câncer [11], para agrupamentos de dados e interações sociais [2], no meio ambiente [4] e, também, em nosso foco de estudo: tráfego de veículos [16]. O primeiro modelo de autômatos celulares usado para modelagem de tráfego de veículos, possivelmente foi proposto por Cremer e Ludvig, em 1986 [17]. No entanto, o uso dos ACs para modelagem do tráfego de veículos começou a difundir-se a partir do modelo proposto por K. Nagel e M. Schreckenberg [14], conhecido como modelo NaSch, em 1992. A partir dele, vários autores propuseram melhorias ao modelo de Nagel para tornar o modelo mais próximo das condições reais de trânsito [3].

Em um modelo de tráfego que utiliza autômatos celulares tem-se:

- $L$ , uma grade  $d$ -dimensional que representa a via, onde cada célula representa um pequeno trecho da pista. Por exemplo, se  $d = 1$ , tem-se uma pista simples, se  $d = 2$  tem-se uma pista com duas faixas.
- $S$ , o conjunto de estados que a célula pode assumir e é composto de informações tais como: ocupação da célula, velocidade do veículo que a ocupa, tamanho do veículo, entre outros. Essas informações dependem do modelo considerado;
- $N$ , a vizinhança, é um conjunto de células à frente da célula avaliada, no sentido do tráfego.
- $f$ , a função de transição é o conjunto de regras que decidirá sobre a movimentação dos veículos, e também varia para cada modelo.

Na literatura existente, a maioria dos trabalhos consideram para simulação dos modelos, condições de contorno periódicas com um número fixo de veículos [8, 13]. Além disso, utiliza-se o tamanho de cada célula igual a  $7,5m$  e uma velocidade de  $v_{max} = 5$  células por passo de tempo. Cada célula pode ter um estado: vazia ou ocupada. Assim, pode-se concluir que para um passo de tempo  $\Delta t = 1$  segundo, um veículo que está com velocidade igual a  $v = 1$  célula por segundo, está a  $7,5m/s$  ou  $27,5km/h$  [10].

## 3 Modelo Proposto

O modelo proposto para este trabalho é composto por uma pista simples de uma faixa. Utilizou-se a grade unidimensional para representar a pista. As regras de movimentação dos veículos foram definidas levando-se em conta alguns fatores, como, a distância (*gap*) entre o  $i$ -ésimo veículo e o veículo a sua frente considerando a velocidade do  $i$ -ésimo veículo no instante de tempo anterior. Neste modelo, todos os motoristas tentam andar sempre na maior velocidade possível (no caso,  $v_{max} = 5$ ) e, eventualmente, com alguma probabilidade  $p = p_m$ , o motorista reduz a sua velocidade em uma unidade por segundo, pois devido a mudanças no comportamento humano ou variações na condições externas, os motoristas podem querer diminuir sua velocidade. Esta última regra é muito importante para simular tráfegos mais realistas, além de ser utilizada em diversos trabalhos encontrados na literatura. A seguir, define-se as seguintes regras de movimentação que compõem este modelo:

- Aceleração: Se a velocidade do veículo  $i$ ,  $v_i$ , for menor que  $v_{max}$  e sua distância para o próximo veículo (*gap*) for maior que  $v_i + 1$ ,  $gap > v_i + 1$ , então a velocidade é aumentada em uma unidade,  $v_i = v_i + 1$ ;

- Aleatoriedade: com uma probabilidade  $p = p_m$ , definida inicialmente, a velocidade de cada veículo, se maior que 0 (zero), é reduzida em uma unidade ( $v = v - 1$ );
- Frenagem: Se a distância de um veículo até o próximo veículo ( $gap$ ) for menor ou igual a sua velocidade ( $gap \leq v$ ), então ele deve reduzir sua velocidade para  $v = gap - 1$ ;
- Atualização da posição: Cada veículo avança  $v$  posições, ou seja,  $l_i = l_i + v$ .

O algoritmo com as regras de movimentação dos veículos foi implementado em linguagem Fortran 95, e as simulações foram realizadas em um computador Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> I5 – 240M processor 2.30 GHZ, 4 GB memory e 750 HD.

## 4 Simulações

As simulações foram realizadas considerando uma pista com 300 células (2.250 metros). Utilizou-se, ainda, uma probabilidade de 20% do motorista reduzir a velocidade devido a fatores externos, ou seja, 20% dos motoristas na pista reduzem a sua velocidade, como especificado nas regras de movimentação descritas anteriormente. Inicialmente, foram distribuídos 10 veículos aleatoriamente ao longo da pista, com aumento constante de 10 veículos até a quantidade máxima suportada de 300 veículos. Considerando como medidas de precisão o tempo computacional e a análise do erro padrão da média, definiu-se o número de 1000 simulações para cada caso analisado. A Tabela 4 apresenta os resultados para os 30 casos analisados.

Tabela 1: Tempo médio obtido a partir de 1.000 simulações geradas para cada quantidade de veículos

Número de veículos	Vel. Média (km/h)	Dev Padrão	Variância	Tempo (seg.)
10	95,921	0,792	0,628	69,879
20	93,288	0,701	0,837	74,574
30	88,863	0,63	0,398	81,942
40	80,75	0,604	0,365	98,987
50	73,428	0,6383	0,407	120,777
60	68,167	0,653	0,426	143,421
70	64,044	0,614	0,377	165,788
80	60,832	0,585	0,342	189,21
90	58,441	0,65	0,422	213,073
100	56,27	0,652	0,425	236,182
110	54,403	0,658	0,434	260,529
120	52,855	0,708	0,502	283,486
130	51,442	0,726	0,527	307,997
140	50,416	0,733	0,538	331,94
150	49,468	0,699	0,488	356,221
160	48,671	0,722	0,522	379,619
170	47,794	0,759	0,576	404,388
180	47,02	0,71	0,504	428,471
190	46,406	0,747	0,558	452,771
200	45,815	0,79	0,624	476,653
210	45,145	0,757	0,573	500,745

220	44,685	0,795	0,633	524,945
230	44.231	0,747	0,558	548,686
240	43,796	0,758	0,757	573,451
250	43.389	0,799	0,64	598,252
260	43,03	0,786	0,618	621,478
270	42.533	0,761	0,579	646,28
280	42,22	0,795	0,633	670,378
290	41.939	0,75	0,562	693,905
300	41.590	0,797	0,636	718,633

Para cada caso analisado considerando o número de veículos distribuídos aleatoriamente na pista, foram determinados os valores referentes ao tempo médio total de escoamento da pista, a velocidade média dos veículos na pista, o desvio-padrão e a variância.

Pode-se observar que para até 60 veículos na pista a velocidade média diminui de maneira não linear e, a partir de 60 veículos, a velocidade média foi reduzindo de forma mais linear. Isso ocorre, pois com poucos veículos na pista, a interação entre os veículos é pequena, o que permite que os veículos desenvolvam uma velocidade maior. Já com o aumento do número de veículos, os veículos começam a interagir e, conseqüentemente, a velocidade média tende a diminuir de forma mais linear. Isso fica mais evidente comparando o tempo médio de escoamento da pista onde, com 10 veículos na pista obteve-se aproximadamente 1,2 minutos para os veículos saírem da pista, e com 300 veículos na pista obteve-se um tempo médio próximo aos 12 minutos.

O desvio-padrão e variância, em todos as situações analisadas, apresentaram valores pequenos e bastante próximos, indicando que os dados são uniformes, e conseqüentemente, tem-se uma menor dispersabilidade evidenciando maior aderência aos resultados do modelo.

## 5 Regressão Polinomial

A fim de verificar se o comportamento numérico dos dados pode ser expresso por meio de uma possível relação de dependência entre as variáveis consideradas, isto é, o tempo médio de escoamento da pista dependente do número de veículos, deve-se verificar algumas hipóteses como, a variável dependente (resposta) deve seguir uma distribuição normal. Quando os dados se aproximam de uma reta, a suposição de normalidade é sustentável. A figura 1 representa a porcentagem da ocorrência dos tempo médios de escoamento. Por meio da análise gráfica, portanto empírica, os dados seguem uma distribuição normal.

Utilizando o teste de normalidade de Kolmogorov-Smirnov<sup>1</sup>, tem-se que o  $p$ -valor  $> 0,150$ , ou seja, o  $p$ -valor é maior do que nível de significância considerado,  $\alpha = 0,05$ . Assim, têm-se evidências estatísticas para garantir a normalidade dos dados. Portanto, pode-se aplicar a regressão polinomial.

A regressão polinomial foi feita utilizando o método dos mínimos quadrados, de forma a minimizar o erro de ajuste. Logo, para obter o melhor ajuste, foram realizados o ajuste linear, quadrático e cúbico. A Tabela 2 apresenta os dados referentes aos coeficientes de R-Quadrado e R-Quadrado (ajustado) para os ajustes realizados. A variância explicada pelos três ajustes foi significativa, mas a que apresentou o melhor resultado foi a regressão polinomial de grau 3.

Assim, ajustou-se um modelo de regressão polinomial cúbica, para estabelecer o relacionamento de dependência entre as variáveis número de veículos e tempo médio total de escoamento dos veículos. A Figura 2 apresenta os resultados para a equação de regressão cúbica obtida.

<sup>1</sup>Em estatística, o teste Kolmogorov-Smirnov é usado para determinar se duas distribuições de probabilidade subjacentes diferem uma da outra ou se uma das distribuições de probabilidade subjacentes difere da distribuição em hipótese, em qualquer dos casos com base em amostras finitas.

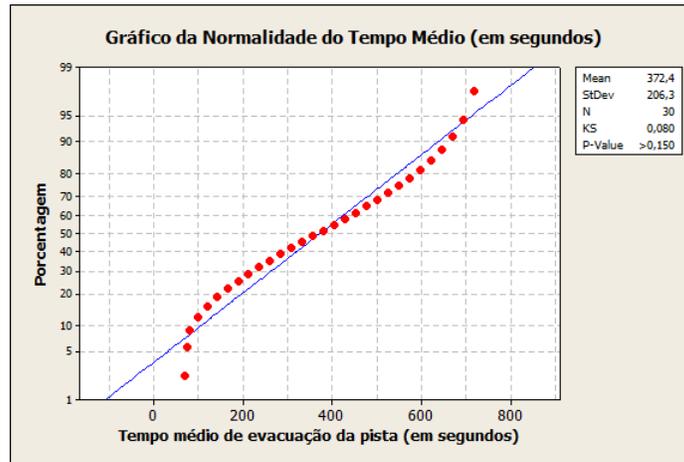


Figura 1: Teste de normalidade para os dados referentes ao tempo médio de escoamento da pista

Tabela 2: Comparação dos coeficientes de determinação na regressão

Ajuste	R-quadrado	R-quadrado (ajustado)
Linear	0,998	0,998
Quadrático	0,999	0,999
Cúbico	1,0	1,0

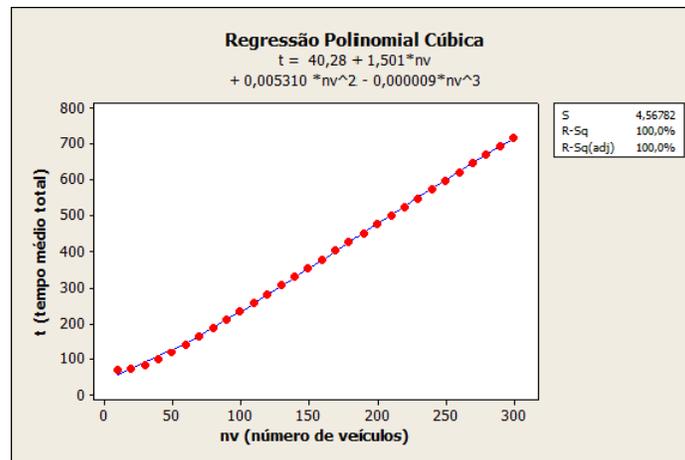


Figura 2: Gráfico da Regressão Polinomial Cúbica

A equação de regressão obtida é dada por

$$t = 40,28 + 1,501 * nv + 0,00531 * nv^2 - 0,000009 * nv^3 \tag{1}$$

onde  $t$  representa o tempo médio total de escoamento e  $nv$  o número de veículos na pista. Os valores apresentados pelo R-Quadrado e R-Quadrado (ajustado), quando próximos de 1, indicam que o modelo é mais explicativo. Nesse caso, o ajuste é adequado aos dados estabelecidos. Mas se faz necessário aplicação da análise de variância (ANOVA), para verificar a existência de regressão significativa. A ANOVA verifica a significância entre as variáveis  $t$  e  $nv$  do modelo obtido.

O desenvolvimento da análise de variância permite a elaboração da tabela da ANOVA, o qual apresenta-se na Tabela 3, obtido com o auxílio do *software* Statgraphics, que  $G.L.$  representa o grau de liberdade e  $F$  é o valor para a estatística do teste. De acordo com a distribuição F de Snedecor, considerando  $\alpha = 0,05$  e graus de 3 e 23, obtém  $F_{3,23}(0,05) = 2,98$ .

Tabela 3: Tabela da Análise de Variância para a regressão cúbica

Fonte de variação	Soma dos Quadrados	G.L.	Quadrado médio	Estatística F	p-valor
Regressão	1,23408E6	3	411360	19715,34	0,0000
Residual	542,489	26	20,865		
Total	1,23462E6	29			

Como  $F = 19715,35 > F_{3,23}(0,05)$ , rejeita-se a hipótese de que a regressão cúbica entre as variáveis  $t$  e  $nv$  não é significativa com 95% de confiança.

Agora, deve-se testar a significância de cada um dos parâmetros da regressão individualmente, ou seja,

$$\begin{cases} H_0 : \beta_i = 0 \\ H_1 : \beta_i \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$i = 0, 1, 2, 3$ . A estatística do teste é dada por:

$$t_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\sigma^2 D_{ii}}} \quad (3)$$

onde  $D_{ii}$  é o  $i$ -ésimo elemento diagonal de  $(X'X)^{-1}$ . Se  $t_i > t_{(\frac{\alpha}{2}, n-k-1)}$ , onde  $n$  é o número de elementos e  $k$  o número de variáveis, rejeita-se a hipótese nula  $H_0$ , considerando a distribuição  $t$  de Student com  $n - k - 1$  graus de liberdade. A Tabela 4 apresenta os resultados para verificar a significância dos parâmetros  $a, b, c$  e  $d$ , obtidos pelo modelo de regressão cúbica.

Tabela 4: Teste de Significância dos parâmetros da regressão

Parâmetro	Estimativa	Erro	Estatística	p-valor
$\beta_0$	40,2805	3,80048	10,5988	0,0000
$\beta_1$	1,50111	0,104437	14,3733	0,0000
$\beta_2$	0,00531048	0,000776041	6,84304	0,0000
$\beta_3$	-0,00000942072	0,00000164723	-5,71913	0,0000

O p-valor de cada um dos coeficientes foi inferior ao nível de significância  $\alpha = 0,05$ . Logo, os parâmetros do modelo possuem significância estatística não precisando excluir nenhuma variável, e assim, mantem-se a ordem do modelo obtido.

## 6 Conclusão

Neste trabalho, apresentou-se um modelo microscópico de simulação do tráfego em rodovias, baseado em autômatos celulares. O modelo proposto utiliza regras simples de movimentação baseadas na interação entre os veículos e possui a característica estocástica, tão importante na simulação de tráfego mais realista. Com os resultados obtidos foi possível desenvolver um modelo de regressão que estabelece uma relação entre o tempo médio total dos veículos na pista e o números de veículos. Tais resultados apresentaram-se satisfatórios e foram validados mediante aplicação da técnica estatística chamada análise de variância (ANOVA).

O estudo realizado neste trabalho abre continuidade para um modelo mais aprofundado da interação entre veículos, possibilitando desenvolver ferramentas de controle ou informação a respeito do tráfego melhorando a qualidade de vida nos grandes centros urbanos. Sugere-se, como trabalhos futuros:

- Desenvolver um modelo multifaixas para o tráfego visando obter situações mais realista;
- Aplicar regras que caracterizem os diversos comportamentos dos motoristas;

- Utilizar pistas com entradas e saídas laterais e simulações que possam envolver acidentes na pista.

## Referências

- [1] Adams, W. F., 1936. Road traffic considered as a random series. *J. Inst. Civil Engineers* 4, 121,130.
- [2] Alonso, E. J. A., 2008. Autômatos celulares generalizados como modelos de influência para agrupamentos de dados e interações sociais. Ph.D. thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [3] Barlovich, R., 1998. Metastable states in cellular automata for traffic flow. *Eur. Phys. J. B.* 5, 793–800.
- [4] Bastos, R. R., 2011. Autômato celular e suas aplicações no meio ambiente. Master's thesis, Universidade Federal de Pelotas.
- [5] Chavez, G. C., Liang, Z., 2003. Sistema celular para reconhecimento de padrão invariante. *Anais do IV Workshop em Tratamento de Imagens.*
- [6] Greenberg, H., 1958. An analysis of traffic flow. *The Port of New York Authority*, 79–85.
- [7] Greenshields, B. D., 1935. A study of traffic capacity. *Proc. Highway Research Board* 14, 448–477.
- [8] Jiang, R., WU, Q., 2006. A stopped time dependent randomization cellular automata model for traffic flow controlled by traffic light. *Physica A* 364, 493–496.
- [9] Louzada, V. H. P., Ferreira, W. C., 2008. Incêndios florestais em autômatos celulares, simples e grandes queimadas. *Biomatemática-Unicamp* 18, 15–26.
- [10] Maerivoet, S., Moor, B., 2008. Cellular automata models of road traffic. *Physics Reports.*
- [11] Martins, C. C., 2010. Autômato celular aplicado no crescimento de câncer. Master's thesis, Universidade Estadual de Ponta Grossa.
- [12] Massahud, R. A. T., Paixão, C. A., 2010. Modelo de propagação de epidemia usando autômatos celulares. *Anais do Cnmac* 3, 1122–1123.
- [13] Nagatani, T., 1993. Self-organization and phase transition in traffic flow model of a two-lan roadway. *J. Physique A: Math Gen.* 26, 781–787.
- [14] Nagel, K., Schreckenberg, M., 1992. A cellular automaton model for freeway traffic. *J. Phys.* 2, 2221–2229.
- [15] Netto, M. T., 2002. Uso de modelos matemáticos em empresa. Online; acesso em 14-janeiro-2013. <http://www.comciencia.br/reportagens/modelagem/mod05.htm>
- [16] Rajeswaran, S., 2012. A realistic approach to the traffic flow behaviors by cellular automata models. *International Journal of Computer Applications* 56, 30–34.
- [17] Rosenblueth, D. A., Gershenson, C., 2011. A model of city traffic based on elementary automata. *Complex Systems Publications, Inc.* 19, 305–322.
- [18] Wolfram, S., 1983. Celular automata. Online; acesso em 02-janeiro-2013. <http://www.stephenwolfram.com/publications/articles/text.html>.