Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Formulações para o problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo

Kelly Cristina Poldi,
Instituto de Ciência e Tecnologia-ICT, Universidade Federal de São Paulo-UNIFESP
12231-280, São José dos Campos, SP
E-mail: kelly.poldi@unifesp.br

Silvio Alexandre de Araújo
Departamento de Matemática Aplicada, IBILCE, UNESP
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: saraujo@ibilce.unesp.br

Resumo: *O problema de corte de estoque multiperíodo surge no planejamento e programação da produção de várias indústrias. Tais indústrias têm seu processo de corte feito em estágios, assim, a demanda por itens acontece em vários períodos de tempo de um horizonte de planejamento finito. É possível antecipar ou não a produção de alguns itens, Estoque de objetos não utilizados em um período fica disponível para ser utilizado no próximo período do horizonte de planejamento, junto com novas peças adquiridas no mercado ou produzidas. Baseados em modelos da literatura para resolução de problemas de corte de estoque, propomos duas extensões para o caso multiperíodo. Ao final, apresentamos testes computacionais que comparam a solução multiperíodo com a solução lote-por-lote.*

1. Introdução

O problema de corte de estoque multiperíodo consiste basicamente em resolver, em cada período de um horizonte de planejamento finito, um problema de estoque de corte, para atender a demanda de itens nos diversos períodos do horizonte de planejamento. Entretanto, a produção de alguns itens pode ser antecipada ou não. Isso permite que novas combinações sejam consideradas, isto é, um item que não tem demanda em um dado período do horizonte de planejamento pode ter sua produção atecipada de um período futuro se sua combinação com outros itens permitir um decrescimento na perda de material. Objetos em estoque (objetos a serem cortados) que não forem usados em um período ficam disponíveis para corete no próximo período, junto com os objetos daquele período (esses objetos podem ser comprados no mercado ou produzidos pela própria indústria, como no estudo de caso em uma indústria papeleira apresentado por Poltroniere *et al.* [9]). A quantidade de objetos em estoque (comprados ou produzidos) é considerada, neste estudo, como um parâmetro de entrada. A função objetivo a ser minimizada combina a perda de material, custo de estocagem de itens que foram antecipados e custo de estocagem de objetos.

Na prática, lotes de produção são definidos e um problema de corte de estoque é resolvido para cada lote de produção, assim a perda no processo de corte não interfere na formação dos lotes. O acoplamento de problemas de corte e dimensionamento de lotes foi estudado por Gramani e França [5], Gramani *et al.* [6,7], Poltronieri *et al.* [9], Alem e Morabito [1] e Vanzela *et al.* [12] entre outros. Nesses modelos matemáticos surge o problema de corte de estoque multiperíodo. O único trabalho na literatura que conhecemos que considere o problema de corte de estoque multiperíodo em si é Poldi e Arenales [8]. Na literatura, ele tem aparecido apenas como subproblema de modelos acoplados de dimensionamento de lotes e corte de estoque.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Esta é a seção 1 que apresenta uma introdução ao problema de corte de estoque multiperíodo. Na seção 2 apresentamos a definição e os modelos matemáticos propostos, que consistem em, a) extensão do modelo de Gilmore e Gomory [4] e, b) extensão do modelo de fluxo de arcos de Valério de Carvalho [10, 11]. Na seção 3 apresentamos os testes computacionais e na seção 4 as conclusões e propostas futuras.

2. Definição do problema e modelagem matemática

"Suponha que temos um horizonte de planejamento finito dividido em t períodos, $t = 1, ..., T$. Um período pode ser uma semana de trabalho, um turno de trabalho, uma semana de trabalho, um mês etc. Suponha também que temos disponíveis K tipos de objetos (barras, rolos, bobinas etc.) de um dado comprimento L_k, $k = 1, ..., K;$ cada tipo está disponível numa quantidade e_{kt}, $k = 1, ..., K$ em cada período t do horizonte de planejamento, $t = 1, ..., T$. Em cada período t, um conjunto de itens de um dado comprimento l_i, $i = 1, ..., m$, deve ser cortado para atender a demanda d_{it}, $i = 1, ..., m$, $t = 1, ..., T$. O problema de corte de estoque multiperíodo consiste em produzir os itens demandados cortando-se os objetos disponíveis em estoque em cada período do horizonte de planejamento, de forma que a demanda dos clientes seja atendida e uma função objetivo seja otimizada, i. e., minimizando perda de material de custos de estocagem."

Definição 1: *Chamamos de* ***padrão de corte*** *a maneira como um objeto em estoque é cortado para a produção dos itens demandados. A um padrão de corte associamos um vetor m-dimensional que contabiliza os itens produzidos,*

$$\mathbf{a}_{kt} = (\ \alpha_{1kt}, \alpha_{2kt}, ..., \alpha_{mkt}\ )^T$$

em que α_{ikt} *é a quantidade de itens do tipo i, no padrão de corte para o objeto tipo k, no período t.*

No caso unidimensional, o vetor associado a um padrão de corte $\mathbf{a}_{kt}$ deve satisfazer a restrição física de capacidade de uma mochila:

$$l_1\ \alpha_{1\mathrm{kt}} + l_2\ \alpha_{2\mathrm{kt}} + \ldots + l_m\ \alpha_{\mathrm{mkt}} \leq L_\mathrm{k} \qquad (1)$$

$$0 \leq \alpha_{\mathrm{ikt}} \leq\ d_{\mathrm{it}},\ \ i = 1, \ldots, m \ \text{ e inteiros,} \ \ k = 1, ..., K,\ \ t = 1, ..., T. \qquad (2)$$

O modelo matemático para o problema de corte de estoque com vários tipos de objetos em estoque (Gilmore e Gomory [3]) tem algumas semelhanças com o problema de corte de estoque multiperíodo, pois permite mais combinações de itens que podem levar a menor perda. No caso de multiperíodos, a combinação dos itens pode ser melhorada quando alguns itens são antecipados.

2.1 Extensão do modelo de Gilmore e Gomory (EGG)

Apresentamos agora uma extensão do modelo de Gilmore e Gomory [4] para o problema de corte de estoque, primeiramente proposto em Poldi e Arenales [8], para tratar o problema de corte de estoque multiperíodo. Considere o seguinte.

Índices:

- $t = 1, ..., T$: número de um período no horizonte de planejamento;
- $k = 1, ..., K$: número do tipo de objeto disponível em estoque;
- $j = 1, ..., N_k$: N_k é o número de padrões de corte do objeto do tipo k, $k = 1, ..., K$;
- $i = 1, ..., m$: número do item demandado.

Dados:

- L_k : comprimento do objeto em estoque k, $k = 1, ..., K$;
- e_{kt} : disponibilidade em estoque do objeto k no período t, $k = 1, ..., K;$ $t = 1, ..., T$;
- l_i : comprimento do item tipo i, $i = 1, ..., m$;
- d_{it} : demanda do item tipo i no período t, $i = 1, ..., m$, $t = 1, ..., T$ ($\mathbf{d}_\mathrm{t}$: vetor com componentes d_{it}).

Parâmetros:

- c_{jk} : custo de cortar o objeto tipo k segundo o j^{th} padrão de corte, $j = 1, ..., N_k$, $k = 1, ..., K$;
- c_{it}^r : custo de estocar o item tipo i no final do período t, $i = 1, ..., m$, $t = 1, ..., T$;
- c_{kt}^s : custo de estocar o objeto tipo k no final do período t, $k = 1, ..., K$, $t = 1, ..., T$.

Variáveis de decisão:

- x_{jk}^{t} : número de objetos tipo k cortados conforme padrão de corte j no período t;
- r_{it} : número de itens do tipo i que são antecipados para o período t ($\mathbf{r}_t$: vetor com componentes r_{it});
- s_{kt} : número de objetos do tipo k não utilizados no período t.

Modelo (EGG):

$$\text{Minimizer} \quad \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{j=1}^{N_1} c_{j1t}x_{j1t} + \sum_{j=1}^{N_2} c_{j2t}x_{j2t} + \cdots + \sum_{j=1}^{N_K} c_{jKt}x_{jKt} + \sum_{i=1}^{m} c_{it}^{r} r_{it} + \sum_{k=1}^{K} c_{kt}^{s} s_{kt}\right) \tag{3}$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \sum_{j=1}^{N_1} \mathbf{a}_{j1}\, x_{j1t} + \sum_{j=1}^{N_2} \mathbf{a}_{j2}\, x_{j2t} + \ldots + \sum_{j=1}^{N_K} \mathbf{a}_{jK}\, x_{jKt} + \mathbf{r}_{t-1} - \mathbf{r}_t = \mathbf{d}_t, \qquad t = 1,...,T \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{N_k} x_{jkt} - \boldsymbol{s}_{t-1} + \boldsymbol{s}_t = \boldsymbol{e}_t, \qquad t = 1,...,T \tag{5}$$

$$x_{jkt} \geq 0, \text{ inteiro, } r_{it} \geq 0,\ s_{kt} \geq 0,\ j = 1,\ldots, N_k,\ k = 1,..., K,\ t = 1, ..., T. \tag{6}$$

O custo de uma coluna que representa um padrão de corte é a perda corresponde à esse padrão de corte: $c_{jk} = L_k - \sum_{i=1}^{m} l_i\, \alpha_{ijk}$, isto é, a perda no *j-ésimo* padrão de corte do objeto tipo k. O custo de antecipação da produção de um item de um período para um período imediatamente anterior é dado por $c_{it}^{r} = \alpha\, l_i$. O custo de estocagem de um objeto que não foi utilizado em um certo período e ficará disponível no próximo período é dado por $c_{kt}^{s} = \beta\, L_k$. Os parâmetros α e β foram definidos para analisarmos a influência dos custos de estocagem no modelo proposto. Podemos fixar qualquer valor para c_{it}^{r} e c_{kt}^{s}.

A função objetivo (3) minimiza a perda total de material, em todos os períodos, e os custos de estocagem de itens e objetos. A antecipação do corte de alguns itens pode aumentar o custo de estocagem de itens (c_{it}^{r}), por outro lado, pode permitir melhor combinação de itens, o que minimiza a perda total. O conjunto de restrições (4) garante que a demanda original seja atendida e (5) garante que a disponibilidade em estoque de cada tipo de objeto não seja excedida. Objetos em estoque não utilizados ao final de um período t ficam disponíveis no período t+1, com uma “penalidade”, isto é, o custo de estocagem c_{kt}^{s}. Se desconsiderarmos os custos de estocagem, há uma tendência a antecipação da produção dos itens, que será limitada pela disponibilidade de estoque dos objetos. Custos de estocagem $\boldsymbol{c}^{r}$ e $\boldsymbol{c}^{s}$ são parâmetros a serem ajustados pelo tomador de decisão, de acordo com as necessidades reais da indústria.

2.2 Extensão do modelo de fluxo em arco (EFA)

Valério de Carvalho [10, 11] considerou o problema de *bin-packing* no qual as variáveis que correspondem aos itens de um certo tipo são indexados pela posição física que elas ocupam no objetos maiores, isto é, uma variável representa , i. e., a variável representa o posicionamento de um item a uma dada distância da borda do rolo.

Baseado nesse princípio de posição-índice, Valério de Carvalho [10, 11] apresentou uma formulação em fluxo em arcos. Considerando os dados descritos na seção anterior, encontrar um padrão de corte válido nesse modelo é equivalente a encontrar um caminho no grafo orientado acíclico G=(V,A), com um conjunto de vértices V={0,1,..., L_{max}}, onde $L_{max}=max\{L_k\}$ é o comprimento do maior objeto; e o conjunto de arcos A é definido como: existe um arco direto entre dois vértices se existir um item de tamanho correspondente ($A=\{(j,k):0 \leq j<h \leq L_{max}$ *e* $h-j=l_i$ *para todo* $1 \leq i \leq m\}$). Além disso, existem arcos adicionais, que são arcos de perda (j, j+1),

j=0,1,...,L_{max}-1. Há um padrão em um único objeto de comprimento L_k se exisir um caminho entre os vértices 0 e L_k. O comprimento dos arcos que constituem o caminho define o tamanho dos itens a serem cortados. No mesmo conjunto de vertices, considere arcos diretos do vértice L_k para o vértice 0, se houver um objeto de comprimento L_k , k=1, . . . , K.

Agora, apresentamos a extensão da formulação em fluxo em arcos para o problema de corte de estoque multiperíodo. Considere as seguintes variáveis adicionais:

- f_{kt}: número de objetos de comprimento L_k cortados no período t (pode ser visto como um arco de retorno do vértice L_k para o vértice 0);
- z_{jht}: número de itens de tamanho *(h-j)* alocados em qualquer objeto a uma distância j do início do objeto, considerando todos os padrões de corte no período t.

Modelo (EFA)

$$\min\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} L_k f_{kt} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T}\sum_{(j,j+l_i)\in A} l_i\, z_{j,j+l_i,t}\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} c_{it}^{r} r_{it} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} c_{kt}^{s} s_{it} \qquad (7)$$

Sujeito a :

$$-\sum_{(0,h)\in A} z_{0ht} = -\sum_{k=1}^{K} f_{kt} \qquad t=1,,...,T \qquad (8)$$

$$\sum_{(j,h)\in A} z_{jht} - \sum_{(h,g)\in A} z_{hgt} = 0 \qquad h=1,...,Lmax\text{-}1(h\neq L_k,\forall k)\ t=1,,...,T \qquad (9)$$

$$\sum_{(j,L_k)\in A} z_{jL_kt} + \sum_{(L_k,h)\in A} z_{L_kht} = -f_{kt} \qquad k=1,,...,K \quad t=1,,...,T \qquad (10)$$

$$\sum_{(j,j+l_i)\in A} z_{j,j+l_i,t} + r_{it-1} - r_{it} = d_{it} \qquad k=1,,...,K \quad t=1,,...,T \qquad (11)$$

$$f_{kt} - s_{kt-1} + s_{kt} = e_{kt} \qquad k=1,,...,K \quad t=1,...,T \qquad (12)$$

$$f_{kt}\in Z_+ \quad s_{kt}\in R_+ \qquad k=1,,...,K \quad t=1,...,T \qquad (13)$$

$$r_{it}\in R_+ \qquad i=1,,...,m \text{ e } t=1,...,T \qquad (14)$$

$$z_{jht}\in Z_+ \qquad (j,h)\in A \quad t=1,...,T \qquad (15)$$

A função objetivo (7) minimiza a perda total de material (primeira parcela) e os custos de estocagem de itens e de objetos. O conjunto de restrições (8)-(10) são restrições de conservação de fluxo. O conjunto de restrições (11) e (12) são equivalentes a (4) e (5), respectivamente e garantem que a demanda seja atendida. (12) garantem que a disponibilidade em estoque seja respeitada.

3. Testes computacionais

Foram realizados experimentos computacionais a fim de analisar os modelos propostos e compará-los com a solução com a solução lote-por-lote. O algoritmo do método simplex com geração de colunas para solução do modelo EGG foi implementado em Delphi 7 e os testes foram realizados em um i7 com 6Gb RAM. O modelo EFA foi implementado e resolvido usando AMPL/CPLEX.

Gau e Wäscher [2] propuseram um gerador para problemas de corte de estoque unidimensional, chamado CUTGEN1. No entanto, CUTGEN1 não pode ser usado aqui porque gera exemplares com apenas um comprimento padrão em estoque e estamos lidando com o problema com vários comprimentos de objetos em estoque. Foi desenvolvido um gerador aleatório com base em CUTGEN1 (Poldi e Arenales, [8]). As instâncias estão divididas em oito classes. Cada classe tem 20 exemplares. A seguir, darremos alguns detalhes sobre como as classes foram construídas e os resultados obtidos.

3.1. O gerador aleatório

Para execução dos testes computacionais, fixamos alguns parâmetros, que estão listados a seguir:

- número de períodos: T = 3 e 6;
- número de tipos de objetos em estoque: K = 3 e 5;
- número de tipos de itens demandados: m = 10 e 20;
- custo de estocar objetos: $c^s_{it} = \beta L_k$, com β=0; 0,1 e 0,01;
- custo de estocar itens: $c^r_{it} = \alpha l_i$, com α=0; 0,1 e 0,01;

Outros parâmetros necessários para os testes foram gerados aleatoriamente nos seguintes intervalos:

- comprimento dos objetos em estoque: $L_k \in$ [300 1000];
- comprimento dos itens demandados: $l_i \in [0{,}1\bar{L} \quad 0{,}4\bar{L}]$, com $\bar{L} = \dfrac{\sum_{k=1}^{K} L_k}{K}$;
- disponibilidade em estoque do objeto tipo k, no período de tempo t: $e_{kt} \in [\lceil a_t \rceil \quad \lceil 2a_t \rceil]$, em que $a_t = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} l_i\, d_{it}}{\sum_{k=1}^{K} L_k}$;
- demanda dos itens: $d_{it} \in$ [10 50].

3.2. Resultados

Foram definidas 8 classes de problemas. Para cada classe foram gerados 20 problemas-teste. Estas classes estão especificadas a seguir, na Tabela 1.

Classe	Número de períodos (T)	Número de objetos (K)	Número de itens (m)
1	3	3	10
2	3	3	20
3	3	5	10
4	3	5	20
5	6	3	10
6	6	3	20
7	6	5	10
8	6	5	20

Tabela 1: Parâmetros de definição das classes de exemplos.

Os resultados apresentados na Tabela 2 foram obtidos considerando-se os parâmetros: custo de estocar objetos β = 0 e custo de estocar itens α = 0. Assim, a função objetivo apresentada na Tabela 2 é a perda total obtida, já que os custos (de estocagem de objetos e itens) são nulos.

Classe	Lote-por-lote (linear)	Multiperíodo (linear)	Diferença	Ganho %
1	124,39	112,91	11,48	9,23 %
2	33,44	30,61	2,83	8,46 %
3	83,18	76,01	7,17	8,62 %
4	11,34	9,59	1,75	15,43 %
5	323,86	255,70	68,16	21,05 %
6	79,61	54,39	25,22	31,68%
7	258,43	199,02	59,41	22,99 %
8	99,46	94,83	4,63	4,66 %
Média	126,71	104,13	22,58	17,82 %

Tabela 2: Função objetivo (média dos 20 exemplos em cada classe) $\alpha = \beta = 0$.

Na Tabela 2 nós consideramos a relaxação linear de duas métodos solução para o problema. A primeira forma de solução é a lote-por-lote que considera cada período individualmente, isto é, em cada período, um problema de corte de estoque é resolvido sem deixar estoque para o próximo período. O segundo método de solução considera o modelo multiperíodo EGG ou EFA. A segunda e terceira colunas apresentam a perda média da solução por relaxação linear das 20 instâncias em cada classe, considerando as abordagens lote-por-lote e multiperíodo, respectivamente. A quarta e quinta colunas são a diferença absoluta e a porcentagem de diferença entre as abordagens, respectivamente. Podemos notar que o modelo mutliperíodo, sem considerar custos de estocagem, ou seja, o modelo está livre para antecipar a produção de itens se eles combinar melhor, de fato obteve soluções melhores com perda menor. Em média, o ganho é de 17, 82%.

Na Tabela 3 fazemos a mesa comparação, porém considerando a solução inteira do problema. Para resolver esse problema usamos o Cplex com limite de tempo de 10 minutos usando a formulação EFA com critérios de redução (ver detalhes em Valério de Carvalho [10,11]). Nesta tabela, acrescentamos duas colunas: *Gap* % (linear), que representa o *gap* entre a solução inteira e a solução da relaxação linear (veja Tabela 2), e é calculado por:

$$\text{Gap \% (linear)} = \frac{100*(\text{multiperíodo(inteiro)}-\text{multiperíodo(linear)})}{\text{multiperíodo(inteiro)}},$$

e a outra coluna adicional é *Gap* % (Cplex) que representa o *gap* proveniente do pacote Cplex.

Classe	Lote-por-lote (inteira)	Multiperíodo (inteira)	Diferença	Ganho %	*GAP* % (linear)	*GAP* % (Cplex)
1	150,55	124,40	26,15	17,37%	15,07%	12,70 %
2	92,85	40,25	52,60	56,65%	43,12%	42,57 %
3	94,30	79,30	15,00	15,91%	7,08%	3,52%
4	55,93	62,20	-6,25	-11,17%	63,36%	61,78%
5	500,45	265,80	234,65	46,89%	10,06%	9,05%
6	791,00	2172,41 (3)*	-1381,41	-174,64%	60,75%	60,53%
7	323,30	207,80	115,50	35,73%	8,81%	7,92%
8	15008,15	11235 (7)	3773,15	25,14%	92,67%	92,66%
Média	2127,07	1773,95	353,67	16,63%	37,62%	36,34%

**O número entre parênteses é o número de exemplares infactíveis.*

Tabela 3: Função objetivo do problema inteiro.

Quando comparamos as abordagens multiperíodo e lote-por-lote podemos notar que as classes ímpares (com 10 tipos de itens demandados) a abordagem multiperíodo é muito melhor que a lote-por-lote. Porém nas classes pares, (com 20 tipos de itens) o pacote Cplex não consegue obter bons resultados ao resolver a formulação multiperíodo EFA (principalmente nas classes 6 e 8 onde o pacote não consegue resolver alguns exemplares) e os resultados não são bons. Assim, heurísticas estão sendo desenvolvidas para tratar instâncias de tamanhos maiores.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0345

4. Conclusões e propostas

Neste trabalho foi definido um problema de corte de estoque cuja demanda ocorre ao longo de um horizonte de planejamento finito. Um modelo matemático foi proposto (extensão do modelo clássico de Gilmore e Gomory [4]) e a técnica de geração de colunas foi adaptada para resolver o problema multiperíodo proposto (relaxação linear). Outra extensão foi proposta baseada no modelo de fluxo em arcos de Valério de Carvalho [10, 11]. Experimentos computacionais mostraram que a abordagem multiperíodo para o problema de corte de estoque tem um grande potencial de obter soluções melhores do que a abordagem lote-por-lote, que é a solução usada em muitas situações práticas hoje em dia. Está em fase final de testes duas heurísticas para obtenção da solução inteira do problema multiperíodo baseado no modelo de Gilmore e Gomory relaxado. Uma idéia para a investigação futura é estender o método de solução para os problemas de corte de estoque bidimensional bem como a inclusão de restrições de capacidade.

5. Agradecimentos

Os autores agradecem as agências de financiamento FAPESP, CAPES e CNPq.

Referências

[1] Alem, D.J., Morabito, R. Production planning in furniture settings via robust optimization. Comp. & Oper. Res., v. 39, p.139-150, (2012).

[2] Gau, T., Wäscher, G. CUTGEN1: A problem generator for the standard one-dimensional cutting stock problem. Eur. Jour. Oper. Res., v. 84, p. 572-579, (1995).

[3] Golmore, P.C., Gomory, R.E. A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II. Oper. Res., v. 11, p. 863-888 (1963).

[4] Gilmore, P.C., Gomory, R.E. Multi-stage cutting stock problems of two and more dimensions. Oper. Res., v. 13, p. 94-120, (1965).

[5] Gramani, M.C.N., França, P.M. The combined cutting stock and lot sizing problem in industrial process. Eur. Jour. of Oper. Res., v. 74, p. 509-521, (2006).

[6] Gramani, M.C.N., França, P.M., Arenales, M.N. A Lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem. Inter. Jour. of Prod. Econ, v. 119, p. 219-227, (2009).

[7] Gramani, M.C.N., França, P.M., Arenales, M.N. A linear optimization approach to the combined production planning model. Jour. of the Franklin Institute, v. 348, p. 1523-1536, (2011).

[8] Poldi, K.C.; Arenales, M.N. O problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo. Pesquisa Operacional, v. 30, p. 153-174, (2010).

[9] Poltronieri, S. C.; Poldi, K. C.; Toledo, F. M. B., Arenales, M. N. A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry. Annals of Oper. Res., v. 157, p. 91-104, (2007).

[10] Valério de Carvalho, J.M. Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound. Annals of Oper. Res., v. 86, p. 629-659, (1999).

[11] Valério de Carvalho, J.M. LP models for bin packing and cutting stock problems. Europ. Jour. of Oper. Res., v. 144, p. 253-273, (2002).

[12] Vanzela, M., Rangel, M. S., Araújo, S. A. The integrated lot sizing and cutting stock problem in a furniture factory. Annals of the 11th IFAC Workshop on Intelligent Manufacturing Systems, São Paulo, Brazil, (2013).

