Os teoremas de Stewart e de Heron e a demonstração nas aulas de matemática

Rudimar Luiz Nós **Olga Harumi Saito**
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR
80230-901, Curitiba, PR
E-mail: rudimarnos@gmail.com, ohsaito@gmail.com

Carlos Alberto Maziozeki de Oliveira *
CPM-PR - Colégio da Polícia Militar do Paraná
E-mail: ccoruja@hotmail.com

Resumo: *Apresenta-se neste trabalho o Teorema de Stewart e sua demonstração e emprega-se este teorema para demonstrar outros teoremas, assim como para solucionar problemas aplicados. Objetiva-se dessa maneira enfatizar a importância da demonstração nas aulas de matemática do ensino médio e também como a aplicação de um teorema relativamente simples pode simplificar a solução de um problema mais elaborado.*

Palavras-chave: *O Teorema de Stewart, O Teorema de Heron, Cevianas, Arbelos, O problema das circunferências tangentes.*

1 Introdução

Os alunos do ensino médio brasileiro geralmente não conhecem teoremas, não sabem demonstrar e têm dificuldades para solucionar problemas aplicados utilizando conhecimentos matemáticos previamente assimilados. Para exemplificar, cita-se o trabalho de Oliveira [5], que aplicou uma atividade centrada no Teorema de Stewart a alunos do segundo ano do ensino médio público, e constatou que esses estudantes, mesmo já tendo estudado trigonometria em triângulos quaisquer, não foram capazes de empregar a Lei dos Cossenos para solucionar os problemas propostos.

Um dos problemas dessa atividade é o problema das quatro circunferências tangentes, enunciado a seguir.

O problema das circunferências tangentes: Calcular o raio da circunferência de centro E, sabendo-se que o raio da circunferência de centro D mede $1cm$ e o raio da circunferência de centro C mede $2cm$. As três circunferências são tangentes entre si e tangentes à circunferência de centro O, como ilustra a Figura 1 [3].

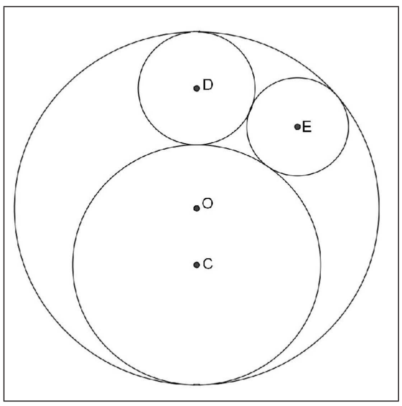


Figura 1: O problema das circunferências tangentes.

Apresenta-se nas próximas seções o Teorema de Stewart, sua demonstração e utiliza-se esse teorema para demonstrar o Teorema de Heron e para solucionar problemas aplicados, como o problema das circunferências tangentes.

*Parte desta pesquisa foi financiada pela CAPES.

 © 2015 SBMAC

2 O Teorema de Stewart

Teorema 2.1 (Stewart) *Dados um triângulo ABC e um ponto D do lado AB, vale a relação*

$$a^2n + b^2m - d^2c = cmn,$$

onde a, b e c são as medidas dos lados, d é a ceviana CD e m e n são os segmentos determinados pela ceviana CD no lado AB [3][4][6].

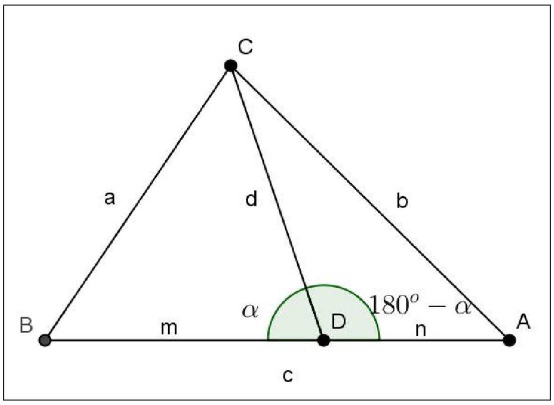


Figura 2: Demonstração do Teorema de Stewart pela Lei dos Cossenos.

Demonstração

Na Figura 2, m e n são as medidas dos segmentos determinados pela ceviana d no lado AB, α é a medida do ângulo BDC e $180^0 - \alpha$ é a medida do ângulo ADC. Aplicando-se a Lei dos Cossenos aos triângulos BDC e ADC, obtém-se, respectivamente,

$$a^2 = m^2 + d^2 - 2mdcos(\alpha) \tag{1}$$

e

$$b^2 = n^2 + d^2 - 2ndcos(180^0 - \alpha). \tag{2}$$

Sabendo-se que $cos(\alpha) = -cos(180^0 - \alpha)$, pode-se reescrever a Equação (2) como

$$b^2 = n^2 + d^2 + 2ndcos(\alpha). \tag{3}$$

Subtraindo-se as Equações (1) e (3), chega-se a

$$a^2 - b^2 = m^2 - n^2 - 2mdcos(\alpha) - 2ndcos(\alpha),$$
$$cos(\alpha) = \frac{b^2 + m^2 - a^2 - n^2}{2d(m+n)}. \tag{4}$$

Substituindo-se a Equação (4) na Equação (1), tem-se que:

$$a^2 = m^2 + d^2 - 2md\frac{b^2 + m^2 - a^2 - n^2}{2d(m+n)};$$
$$a^2(m+n) = m^2(m+n) + d^2(m+n) - b^2m - m^3 + a^2m + n^2m;$$
$$a^2m + a^2n = m^3 + m^2n + d^2m + d^2n - b^2m - m^3 + a^2m + n^2m;$$
$$a^2n + b^2m = d^2(m+n) + mn(m+n). \tag{5}$$

Como $m + n = c$, reescreve-se a Equação (5) como

$$a^2n + b^2m - d^2c = cmn. \tag{6}$$

3 O Teorema de Heron

Teorema 3.1 (Heron) *A área S de um triângulo ABC qualquer é dada por*

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

sendo $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro do triângulo e a, b e c as medidas dos lados.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0496 © 2015 SBMAC

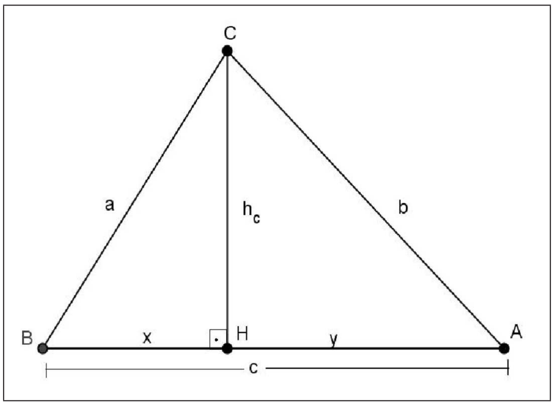


Figura 3: Demonstração do Teorema de Heron.

Demonstração

Seja o triângulo ABC de base c e altura h_c, ilustrado na Figura 3. Aplicando-se o Teorema de Pitágoras aos triângulos BHC e AHC, obtém-se, respectivamente,

$$a^2 = x^2 + h_c^2 \tag{7}$$

e

$$b^2 = y^2 + h_c^2. \tag{8}$$

Subtraindo-se as Equações (7) e (8), tem-se que

$$a^2 - b^2 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y). \tag{9}$$

Como $x + y = c$, então

$$y = c - x. \tag{10}$$

Substituindo-se a Equação (10) na Equação (9), obtém-se

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}. \tag{11}$$

Substituindo-se a Equação (11) na Equação (10), tem-se que

$$y = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}. \tag{12}$$

Aplicando-se o Teorema de Stewart ao triângulo ABC, obtém-se

$$a^2y + b^2x - h_c^2c = cxy. \tag{13}$$

Substituindo-se as Equações (11) e (12) na Equação (13), tem-se que:

$$\begin{aligned}
a^2\frac{-a^2+b^2+c^2}{2c} + b^2\frac{a^2-b^2+c^2}{2c} - h_c^2c &= c\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}\frac{-a^2+b^2+c^2}{2c};\\
-2a^4 + 4a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^4 + 2b^2c^2 - 4h_c^2c^2 &= -a^4 - b^4 + c^4 + 2a^2b^2;\\
4h_c^2c^2 &= -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2. \qquad (14)
\end{aligned}$$

Somando-se e subtraindo-se $2a^2c^2$ ao lado direito da Equação (14), obtém-se:

$$\begin{aligned}
4h_c^2c^2 &= 4a^2c^2 - \left(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2\right);\\
4h_c^2c^2 &= 4a^2c^2 - \left[\left(a^4 + 2a^2c^2 + c^4\right) - 2b^2\left(a^2 + c^2\right) + b^4\right];\\
4h_c^2c^2 &= 4a^2c^2 - \left[\left(a^2 + c^2\right)^2 - 2\left(a^2 + c^2\right)b^2 + b^4\right];\\
4h_c^2c^2 &= 4a^2c^2 - \left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2;\\
4h_c^2c^2 &= \left[2ac + \left(a^2 + c^2 - b^2\right)\right]\left[2ac - \left(a^2 + c^2 - b^2\right)\right];\\
4h_c^2c^2 &= \left[\left(a^2 + 2ac + c^2\right) - b^2\right]\left[-\left(a^2 - 2ac + c^2\right) + b^2\right];\\
4h_c^2c^2 &= \left[(a+c)^2 - b^2\right]\left[b^2 - (a-c)^2\right];\\
4h_c^2c^2 &= (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c). \qquad (15)
\end{aligned}$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0496

© 2015 SBMAC

O perímetro do triângulo ABC é dado por $2p = a + b + c$. Logo:

$$a + c - b = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b); \quad (16)$$
$$b + a - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c); \quad (17)$$
$$b - a + c = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a). \quad (18)$$

Substituindo-se as igualdades (16), (17) e (18) na Equação (15), tem-se que:

$$4h_c^2c^2 = 2p2(p - b)2(p - c)2(p - a);$$
$$h_c^2 = \frac{4}{c^2}p(p - a)(p - b)(p - c);$$
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \quad (19)$$

Como a área S do triângulo ABC pode ser calculada pelo semiproduto de um lado pela altura relativa a esse lado, tem-se que

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}h_c c. \quad (20)$$

Substituindo-se a Equação (19) em (20), obtém-se:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}c\frac{2}{c}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)};$$
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \quad (21)$$

4 Aplicações

4.1 O problema das circunferências tangentes

Sejam x a medida do raio da circunferência de centro E ilustrada na Figura 4, $D\hat{O}E = \alpha$ e $C\hat{O}E = \beta$. Verifica-se facilmente que o raio da circunferência de centro O mede $3cm$ e que:

$OE = OT - ET = 3 - x = z$; $DE = 1 + x = a$; $CE = 2 + x = b$; $OD = 2 = m$; $OC = 1 = n$.

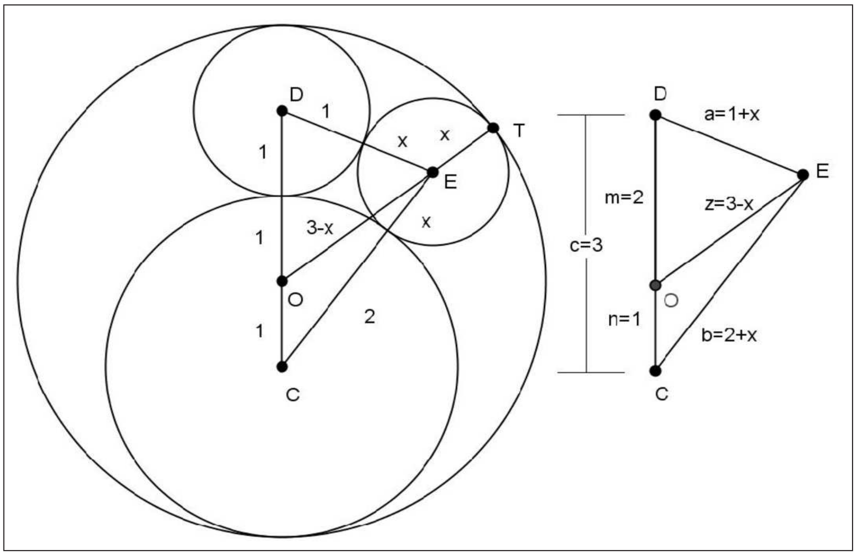


Figura 4: Triângulo CDE cujos vértices são os centros de três das circunferências tangentes.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0496 © 2015 SBMAC

Aplicando-se o Teorema de Stewart ao triângulo CDE da Figura 4, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
a^2n + b^2m - z^2c &= cmn; \\
(1+x)^2(1) + (2+x)^2(2) - (3-x)^2(3) &= 3(2)(1); \\
1 + 2x + x^2 + 8 + 8x + 2x^2 - 27 + 18x - 3x^2 &= 6; \\
28x &= 24; \\
x &= \frac{6}{7}.
\end{aligned}
$$

4.2 Demonstração de outros teoremas

Emprega-se agora o Teorema de Stewart para demonstrar o Teorema 4.1, proposto em [6].

Teorema 4.1 *A soma dos quadrados das medidas dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das medidas das diagonais.*

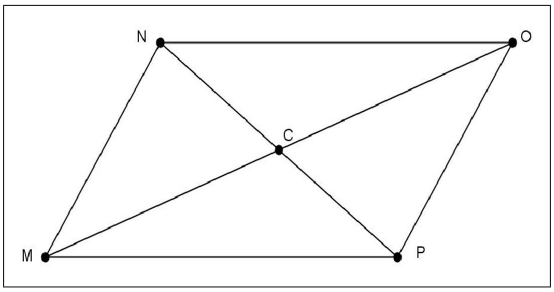


Figura 5: Paralelogramo $MNOP$ e suas diagonais MO e NP.

Demonstração

Sejam o paralelogramo $MNOP$, ilustrado na Figura 5, de lados $MP = NO = a$ e $MN = OP = b$, $MO = d_1$ e $NP = d_2$ as diagonais do paralelogramo $MNOP$ e $MC = CO = \frac{d_1}{2}$ e $NC = CP = \frac{d_2}{2}$. Aplicando-se o Teorema de Stewart aos triângulos MOP e MNP, obtém-se, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
a^2\frac{d_1}{2} + b^2\frac{d_1}{2} - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 d_1 &= d_1\frac{d_1}{2}\frac{d_1}{2}, \\
\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{d_2^2}{4} &= \frac{d_1^2}{4} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
a^2\frac{d_2}{2} + b^2\frac{d_2}{2} - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 d_2 &= d_2\frac{d_2}{2}\frac{d_2}{2}, \\
\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{d_1^2}{4} &= \frac{d_2^2}{4}. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

Somando-se as Equações (22) e (23), obtém-se:

$$
\begin{aligned}
2\frac{a^2}{2} + 2\frac{b^2}{2} - \frac{d_1^2}{4} - \frac{d_2^2}{4} &= \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4}; \\
2\left(a^2 + b^2\right) &= d_1^2 + d_2^2. \qquad (24)
\end{aligned}
$$

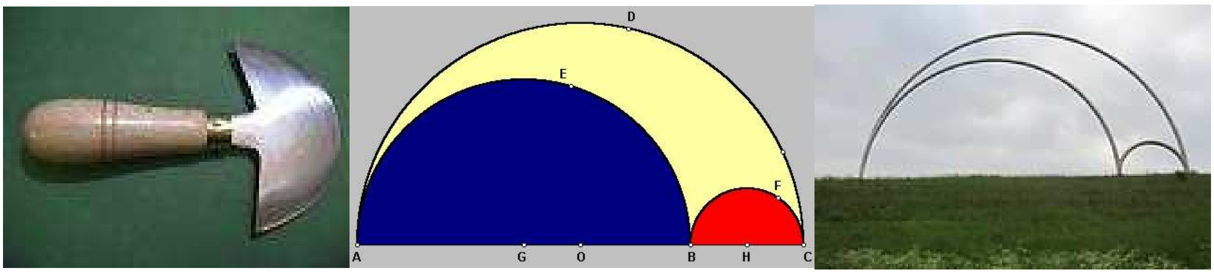
4.3 Arbelos

Arbelos, do grego “faca de sapateiro” - Figura 6 (a), é uma região plana delimitada por três semicircunferências, como ilustra a Figura 6 (b). Acredita-se que Arquimedes tenha sido o primeiro a estudar suas propriedades matemáticas.

Pode-se utilizar o Teorema de Stewart para relacionar os raios r_1, r_2 e $r_1 + r_2$ de uma *arbelos* com o raio r de uma circunferência inscrita [1], como ilustra a Figura 7. Constata-se que o triângulo cujos vértices são os centros das semicircunferências de raios r_1 e r_2 e da

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0496

© 2015 SBMAC



(a) (b) (c)

Figura 6: (a) Faca de sapateiro [2], (b) *arbelos* [7] e (c) escultura na Holanda [8].

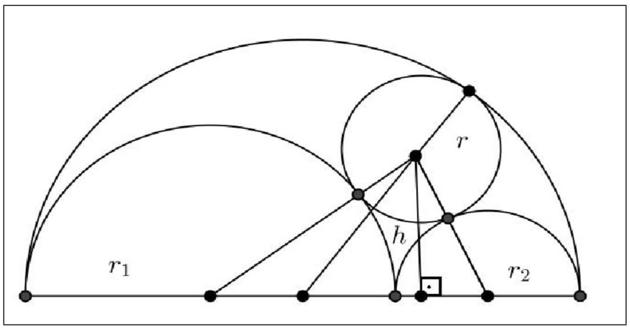


Figura 7: Circunferência inscrita em uma *arbelos*.

circunferência de raio r, tem lados de medidas $r + r_1$, $r + r_2$ e $r_1 + r_2$. Aplicando-de o Teorema de Stewart a esse triângulo considerando-se a ceviana de medida $r_1 + r_2 - r$, tem-se que

$$(r + r_1)^2 (r_1) + (r + r_2)^2 (r_2) - (r_1 + r_2 - r)^2 (r_1 + r_2) = r_1 r_2 (r_1 + r_2). \tag{25}$$

Desenvolvendo-se algebricamente a igualdade (25), obtém-se:

$$\begin{aligned} 4rr_1r_2 + 4rr_1^2 + 4rr_2^2 - 3r_1^2r_2 - 3r_1r_2^2 &= r_1r_2(r_1 + r_2); \\ 4r\left(r_1r_2 + r_1^2 + r_2^2\right) - 3r_1r_2(r_1 + r_2) &= r_1r_2(r_1 + r_2); \\ 4r\left(r_1r_2 + r_1^2 + r_2^2\right) &= 4r_1r_2(r_1 + r_2); \\ r &= \frac{r_1r_2(r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Utilizando-se o Teorema de Heron, pode-se mostrar agora que, na Figura 7, $h = 2r$.

A área S do triângulo cujos vértices são os centros das circunferências de raios r_1, r_2 e r é dada por

$$S_\Delta = \frac{1}{2} h (r_1 + r_2). \tag{27}$$

Aplicando-se o Teorema de Heron a esse triângulo, tem-se que

$$S_\Delta = \sqrt{(r + r_1 + r_2)\, r r_1 r_2}. \tag{28}$$

Substituindo-se a Equação (26) em (28), obtém-se:

$$S_\Delta = \sqrt{\left(\frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2} + r_1 + r_2\right) \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2} r_1 r_2};$$

$$S_\Delta = \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)\left(r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2\right)}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2} \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2} r_1 r_2};$$

$$S_\Delta = \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)(r_1 + r_2)^2}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2} \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2} r_1 r_2};$$

$$S_\Delta = \frac{(r_1 + r_2)^2 r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2}. \tag{29}$$

Igualando-se as Equações (27) e (29) e empregando-se a Equação (26), conclui-se que:

$$h = 2\frac{(r_1 + r_2) r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2};$$

$$h = 2r.$$

5 Conclusão

A solução do problema das quatro circunferências tangentes, assim como a relação entre os raios das semicircunferências que definem uma *arbelos* com o raio da circunferência inscrita, é simplificada com o uso do Teorema de Stewart, o qual também permite demonstrar outros teoremas, como o Teorema de Heron. Ressaltou-se neste artigo a demonstração de teoremas com o intuito de incentivar os professores de matemática do ensino médio a incorporar efetivamente a demonstração no processo ensino-aprendizagem e também a usar os teoremas demonstrados na solução de problemas aplicados.

Referências

[1] A Matemática Pura, "Brahmagupta, Heron e alguma aplicações interessantes", 2014. Disponível em: http://amatematicapura.blogspot.com.br/2012/07/brahmagupta-heron-e-algumas-aplicacoes.html. Acesso em: 19 de fevereiro de 2014.

[2] Bowstock, "Round knife", 2014. Disponível em: http://www.bowstock.co.uk/acatalog/Knives.html. Acesso em: 19 de fevereiro de 2014.

[3] O. Dolce; J.N. Pompeo, "Fundamentos de Matemática Elementar", v. 9, 6^a ed, Atual, São Paulo, 2005.

[4] A.C. Morgado; E. Wagner; M. Jorge, "Geometria II", 4^a ed, VestSeller, São Paulo, 2009.

[5] C.A.M. de Oliveira, "Os teoremas de Stewart e de Heron e o cálculo da área de um triângulo em função dos lados", Dissertação de Mestrado, PROFMAT-UTFPR-CT, 2014.

[6] A.S. Posamentier; C.T. Salkind, "Challenging problems in geometry", Dover, New York, 1996.

[7] The University of Georgia, "Arbelos: the shoemaker's knife", 2014. Disponível em: http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.2000/Westmoreland/Essay1/Essay1.html. Acesso em: 19 de fevereiro de 2014.

[8] Wikipedia, "Arbelos", 2014. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Arbelos. Acesso em: 19 de fevereiro de 2014.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0496

© 2015 SBMAC