

## **Análise de erros computacionais de um modelo generalizado da equação de Richards**

**Amauri A. de Freitas\***

**Daniel G. A. Vigo**

**Marcello G. Teixeira**

Depto. de Ciências de Computação – Instituto de Matemática, PPGI, UFRJ

Caixa Postal 68.530, CEP 21941-590, Cidade Universitária, Ilha do Fundão, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

amauri.freitas@ppgi.ufrj.br, dgalfaro@dcc.ufrj.br, marcellogt@dcc.ufrj.br

**Carlos A. B. de Vasconcellos**

Depto. de Engenharia de Fortificação e Construção - Instituto Militar de Engenharia - IME

Praça General Tiburcio, 80, Praia Vermelha, Urca, CEP 22290-270, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

vasconcellos@ime.eb.br

### **RESUMO**

A infiltração de água no solo é um processo hidrológico cuja simulação computacional tem diversas aplicações em vários ramos da ciência, tais como irrigação, meio ambiente, petróleo e gás, geologia, agronomia dentre outras. A equação que governa esse fenômeno físico é a Equação de Richards, que pode ser escrita como

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (1)$$

onde  $x$  é a coordenada horizontal,  $z$  é a coordenada vertical,  $t$  é o tempo,  $K(\theta)$  é a condutividade hidráulica do solo não-saturado,  $D(\theta)$  é a difusividade da água no solo e  $\theta$  é o conteúdo volumétrico de água no solo.

A equação de Richards unidimensional considerando apenas a infiltração da água na direção vertical já foi largamente explorada na literatura [1], [3], [6]. Entretanto, o escoamento horizontal apresenta particularidades que podem influenciar na solução numérica, conforme apresentado por [5].

Na tentativa de se obter uma melhor solução aproximada para a direção horizontal, [2] e [4] introduziram uma dependência empírica da difusividade hidráulica em relação a distância  $x$  e ao tempo  $t$  e usaram a derivada fracionária obtendo a equação de Richards generalizada, dada por

$$\frac{\partial^\gamma \theta}{\partial t^\gamma} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ D_\gamma(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad (2)$$

onde  $\gamma$  é a ordem da derivada fracionária, com  $0 < \gamma \leq 1$ , observando-se resultados numéricos melhores do que aqueles obtidos com a representação clássica da equação de Richards. No entanto, apesar dos bons resultados numéricos obtidos, não há até o momento uma interpretação física para esta dependência.

Neste trabalho apresenta-se um estudo da equação generalizada de Richards (2) para o problema na horizontal, que visa analisar os erros numéricos obtidos quando se reduz o número de passos utilizados no cálculo da derivada fracionária na discretização temporal e mantendo-se o Método de Diferenças Finitas para aproximar as derivadas espaciais. A solução semi-analítica obtida por [5] será comparada com a solução numérica proposta.

**Palavras-chave:** *Equação de Richards, Método de Diferenças Finitas, Derivada fracionária, Modelo generalizado, Infiltração horizontal*

\* Aluno de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Informática - PPGI-UFRJ

## Referências

- [1] C.A.B. Vasconcellos and J.C.C. Amorim. Numerical Simulation of Unsaturated Flow in Porous Media using a Mass-Conservative Model. *XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM - ABCM*, Uberlândia-MG, Brasil, 2001.
- [2] I.A. Guerrini and D. Swartzendruber. Fractal characteristics of the horizontal movement of water in soil. *Fractals - Complex Geometry Patterns and Scaling in Nature and Society*, 2-3 (1994) 465-468.
- [3] M.A. Celia, E.T. Bouloutas and R.L. Zarba. A General Mass-Conservative Numerical Solution for the Unsaturated Flow Equation. *Water Resources Research*, 26-7 (1990) 1483-1496.
- [4] Y.A. Pachepsky and D. Timlin. Water Transport in soils as in fractal media. *Journal of Hydrology*, 204 (1998) 98–107.
- [5] Y.A. Pachepskya, D. Timlinb and W. Rawls, Generalized Richards' equation to simulate water transport in unsaturated soils. *Journal of Hydrology*, 272 (2003) 3-13.
- [6] Y. Ma, S. Feng, D. Su, G. Gao and Z. Huo. Modeling water infiltration in a large layered soil column with a modified Green-Ampt model and HYDRUS 1-D. *Computers and Electronics in Agriculture*, 1S (2010) S40–S47.