

# Um novo método de reconstrução de fontes concentradas

**Antonio A. Novotny**      **Thiago J. Machado\***

Laboratório Nacional de Computação Científica LNCC/MCT

25651-075, Petrópolis, RJ

E-mail: novotny@lncc.br, thiagojm@lncc.br,

## RESUMO

O problema inverso do potencial consiste em reconstruir uma fonte desconhecida com suporte em um domínio geométrico a partir de uma única medição sobre a fronteira. A fim de tratar este problema inverso mal posto, este será reescrito como um problema de otimização onde um funcional de forma baseado no critério de Kohn-Vogelius é minimizado. Este funcional mede a diferença entre as soluções de dois problemas auxiliares, onde um deles contém a informação relativa à leitura no contorno enquanto o outro é munido com a informação correspondente à excitação no contorno. As soluções dos problemas auxiliares coincidem quando se está sobre a solução do problema inverso. Para minimizar o critério de Kohn-Vogelius, sua variação total com respeito a um conjunto de fontes concentradas é avaliada explicitamente. Baseado na expressão obtida, constrói-se um novo método para resolver o problema inverso do potencial. Por fim, alguns resultados numéricos são apresentados a fim de mostrar a efetividade do algoritmo de reconstrução construído.

## 1 Introdução

O problema inverso do potencial consiste em encontrar o termo fonte de uma equação diferencial através de medições tomadas sobre a fronteira do domínio de definição deste problema. Um dos principais resultados obtidos para este problema é devido a Isakov, que provou em [5], que subdomínios estrelados ou convexos em uma direção podem ser detectados a partir de informações obtidas sobre um subconjunto da fronteira do domínio. Mais recentemente, El Badia e Ha Duong [1] trataram o caso de fontes concentradas dipolares e monopolares, estabelecendo um algoritmo que permite identificar o número, as localizações e os momentos dos dipolos, além de demonstrar um resultado de unicidade da solução. Entre as aplicações do problema inverso do potencial, destaca-se a identificação de fontes de poluição em um ambiente [2, 5] e os problemas de identificação de monopolos e dipolos em eletroencefalografia e magnetoencefalografia [3, 4].

A proposta deste trabalho é resolver o problema inverso do potencial para o caso em que a classe de soluções admissíveis é formada por fontes concentradas. O problema inverso deve ser resolvido independentemente da quantidade de informação disponível no contorno. Ao invés de atacar o problema inverso diretamente, introduz-se um problema de otimização com o funcional de forma baseado no critério de Kohn-Vogelius e deseja-se demonstrar a equivalência entre o problema de otimização e o problema inverso.

O trabalho está organizado da seguinte forma: na seção 2, é apresentada a formulação matemática do problema inverso do potencial, seguida da definição do conjunto de possíveis soluções admissíveis. A seção 3 traz o problema de otimização e a análise de sensibilidade do funcional de forma tanto para

---

\*Bolsista de doutorado Capes

o caso em que o domínio é limitado, quanto para o caso não limitado. Encerrando o trabalho, a seção 4 contém alguns resultados numéricos referentes ao caso de domínio limitado.

## 2 O problema inverso do potencial

Esta seção é aberta com a formulação do problema inverso do potencial, objeto de estudo deste trabalho. Sabendo que a incógnita deste problema é o termo fonte, o conjunto onde se busca tal termo é definido, visando facilitar o estudo da unicidade da solução.

### 2.1 Formulação do problema

Considere o conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , com fronteira Lipschitz, denotada por  $\partial\Omega$ . O problema inverso do potencial consiste em encontrar a função  $b^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  a partir de  $u^* : \Gamma_m \rightarrow \mathbb{R}$  e  $q^* : \Gamma_m \rightarrow \mathbb{R}$ , de modo que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = b^* \quad \text{in } \Omega \\ u = u^* \\ -\partial_n u = q^* \end{array} \right\} \text{ sobre } \Gamma_m, \quad (2.1)$$

onde  $\Gamma_m$  é um subconjunto de  $\partial\Omega$  e tem medida não nula.

**Observação 2.1.** Na prática, para construir o problema (2.1), impõe-se uma das condições,  $u^*$  ou  $q^*$ , sobre  $\Gamma_m$ . Tal imposição gera uma leitura que é agregada ao problema como sendo a outra condição de contorno, tornando o problema sobredeterminado. Além disso, não será feita distinção entre o caso em que a condição  $u^*$  é imposta e  $q^*$  é lida e o caso oposto, pois isto não altera o problema do ponto de vista matemático.

### 2.2 Conjunto de soluções admissíveis

Em seguida, apresenta-se o conjunto de soluções admissíveis de (2.1). Isto é feito, principalmente, com a finalidade de facilitar o estudo da unicidade da solução. Assim sendo, buscam-se soluções no seguinte conjunto:

$$C_\delta(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \varphi(x) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \delta(x - x_i); M \in \mathbb{N} \right\}, \quad (2.2)$$

onde  $x_i \in \Omega$  e  $\alpha_i \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ . Desta forma, reconstruir  $b^*$  significa determinar o número de fontes concentradas, suas respectivas intensidades e, finalmente, os seus respectivos pontos de aplicação. El Badia e Ha-Duong demonstraram a unicidade de solução para este tipo de termo fonte [1].

## 3 Reconstrução de fontes concentradas

Após definir o conjunto de possíveis soluções, será feita a análise para os casos em que a informação está disponível sobre todo o contorno ( $\Gamma_m = \partial\Omega$ ) ou, sobre uma parte deste contorno ( $\Gamma_m \subsetneq \partial\Omega$ ).

Em ambos os casos, a estratégia adotada para calcular a solução do problema inverso visa evitar a inversão do operador laplaciano, considerando um problema de otimização equivalente a (2.1). O funcional que deve ser minimizado é baseado no critério de Kohn-Vogelius.

### 3.1 Domínio limitado: leitura completa

Inicialmente, será tratado o caso em que  $u^*$  e  $q^*$  são conhecidas sobre todo o contorno de  $\Omega$ . Define-se, sobre o mesmo domínio do problema inverso, o problema de otimização utilizando o funcional de forma baseado no critério de Kohn-Vogelius. A principal vantagem de utilizar este funcional reside no fato de que pode-se tratar da mesma maneira os casos em que o dado de Dirichlet é imposto ou lido. Além disso, haverá uma garantia de que este funcional atinge mínimo sobre a solução do problema inverso.

### 3.1.1 Problema de otimização

Como dito acima, considera-se um problema de otimização cujo funcional de forma é dado por:

$$\mathcal{J}(u^D, u^N) = \frac{1}{2} \|u^D - u^N\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^D - u^N)^2, \quad (3.1)$$

onde as funções  $u^D$  e  $u^N$  são as respectivas soluções dos seguintes problemas:

$$\begin{cases} -\Delta u^D = b & \text{em } \Omega \\ u^D = u^* & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\Delta u^N = b + c & \text{em } \Omega \\ -\partial_n u^N = q^* & \text{sobre } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} u^N = \int_{\Omega} u^D \end{cases}. \quad (3.2)$$

Nos dois problemas acima, tem-se que  $b \in C_{\delta}(\Omega)$ . No caso do problema de Neumann, adiciona-se uma constante ao termo fonte, a fim de satisfazer a condição de compatibilidade. Utilizando o teorema da divergência de Green, obtém-se o valor desta constante. Ainda com relação ao problema de Neumann, a última equação garante unicidade de solução. A proposição a seguir associa a minimização do funcional (3.1) à resolução do problema inverso (2.1).

**Proposição 3.1.** *Sejam  $u^D$  e  $u^N$  soluções dos problemas (3.2), respectivamente. Se a fonte destes problemas for igual à fonte  $b^*$ , que é a solução do problema inverso (2.1), então  $u^D = u^N = u$ .*

### 3.1.2 Análise de sensibilidade

O próximo passo consiste em perturbar o termo fonte  $b$  dos problemas auxiliares, adicionando a este  $m$  cargas, nos pontos  $x_i$ , cada uma com intensidade  $\alpha_i$ , com  $i \in \{M + 1, M + 2, \dots, M + m\}$ . O novo termo fonte, denotado por  $b_{\delta}$ , será um elemento de  $C_{\delta}(\Omega)$  dado por:

$$b_{\delta} = b + \sum_{i=1}^m \alpha_i \delta_i, \quad (3.3)$$

onde os parâmetros  $m$ ,  $x_i$  e  $\alpha_i$  são todos conhecidos. A partir desta nova fonte, surgem dois novos problemas, que serão denominados problemas perturbados. Estes consistem em encontrar, respectivamente,  $u_{\delta}^D$  e  $u_{\delta}^N$ , tais que

$$\begin{cases} -\Delta u_{\delta}^D = b_{\delta} & \text{em } \Omega \\ u_{\delta}^D = u^* & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\Delta u_{\delta}^N = b_{\delta} + c_{\delta} & \text{em } \Omega \\ -\partial_n u_{\delta}^N = q^* & \text{sobre } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} u_{\delta}^N = \int_{\Omega} u_{\delta}^D \end{cases}. \quad (3.4)$$

De maneira análoga ao que foi feito em (3.2), a última equação do problema perturbado de Neumann serve para garantir a unicidade da solução e adiciona-se uma constante ao termo fonte para garantir a compatibilidade do problema.

A partir da perturbação do termo fonte  $b$ , representada pela equação (3.3), procura-se uma forma de relacionar as soluções dos problemas perturbados às soluções dos problemas auxiliares. Considera-se, então, as seguintes igualdades:

$$u_{\delta}^D - u^D = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \quad \text{e} \quad u_{\delta}^N - u^N = \sum_{i=1}^m \alpha_i (v_i + h_i). \quad (3.5)$$

Tem-se que, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , as funções  $v_i$  e  $h_i$  são soluções de:

$$\begin{cases} -\Delta v_i = \delta_i & \text{em } \Omega \\ v_i = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Delta h_i = \frac{1}{|\Omega|} & \text{em } \Omega \\ -\partial_n h_i = \partial_n v_i & \text{sobre } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} h_i = 0 \end{cases}.$$

**Observação 3.2.** Note que o termo fonte dos problemas acima não depende do termo fonte inicial  $b$  dos problemas (3.2). Como será visto adiante, a implementação numérica pode ser feita considerando  $b = 0$  em  $\Omega$ .

Deseja-se fazer a análise de sensibilidade do funcional  $\mathcal{J}(u_\delta^D, u_\delta^N)$  com relação aos parâmetros que definem os elementos de  $C_\delta(\Omega)$ . Avaliando o funcional de forma sobre as soluções dos problemas perturbados, obtém-se:

$$\mathcal{J}(u_\delta^D, u_\delta^N) - \mathcal{J}(u^D, u^N) = \int_\Omega \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i (u^D - u^N) + \frac{1}{2} \int_\Omega \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i \right)^2 \quad (3.6)$$

Note que o lado direito da equação (3.6) pode ser visto como uma função das intensidades  $\alpha_i$  e dos pontos  $x_i$ . A fim de encontrar as intensidades que minimizam a diferença dos funcionais, resolve-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} (\mathcal{J}(u_\delta^D, u_\delta^N) - \mathcal{J}(u^D, u^N)) = 0. \quad (3.7)$$

De (3.7) e (3.6), e utilizando notação indicial, segue que

$$H_{ki} \alpha_i^* = d_k, \quad (3.8)$$

onde  $\alpha_i^*$  representa o valor da intensidade ótima e tem-se

$$H_{ki} = \int_\Omega h_k h_i \quad \text{e} \quad d_k = - \int_\Omega h_k (u^D - u^N), \quad (3.9)$$

Os valores de  $\alpha_i^*$ , obtidos após a resolução do sistema (3.8), são substituídos em (3.6), o que fornece

$$\mathcal{J}(u_\delta^D, u_\delta^N) - \mathcal{J}(u^D, u^N) = -\frac{1}{2} \sum_{i=M+1}^{M+m} \alpha_i^* d_i. \quad (3.10)$$

A partir desta equação, buscam-se os pontos que minimizam o funcional de forma, obtendo-se assim, as localizações ótimas  $x_i^*$  das cargas. Portanto, para o caso de leitura, é possível determinar dois parâmetros do termo fonte que minimizam o funcional de forma. A seguir, introduz-se o problema para o caso de leitura parcial sobre um domínio ilimitado.

### 3.2 Domínio não limitado: leitura parcial

Seja  $\mathcal{D}$  um subconjunto não limitado do  $\mathbb{R}^2$ . Considere que  $\mathcal{D}$  seja o domínio de definição do problema inverso do potencial. Ademais, considere que  $\Gamma_m$ , onde se encontram as informações  $u^*$  e  $q^*$ , seja um subconjunto de  $\partial\mathcal{D}$  com medida não nula. Assim como no caso em que o domínio era limitado, considera-se que o termo fonte seja constituído de cargas concentradas.

#### 3.2.1 Limitação do domínio e problema de otimização

A fim de considerar um problema de otimização análogo àquele do caso de domínio limitado, constrói-se um contorno artificial  $\Gamma$  que define uma região limitada e que, por hipótese, contenha todas as cargas pontuais pertencentes a  $b^*$ . A região limitada será denotada por  $\Omega$  e a fronteira de  $\Omega$  contém  $\Gamma_m$ . Logo,  $\partial\Omega = \Gamma_m \cup \Gamma$ , tal que  $\Gamma_m \cap \Gamma = \emptyset$ .

Após a limitação do domínio, introduz-se dois problemas auxiliares com termo fonte em  $C_\delta(\Omega)$ . Estes problemas serão definidos sobre  $\Omega$ . O próximo passo consiste em completar a informação sobre  $\Gamma$ . Para isso, será utilizado o potencial newtoniano, dado por:

$$u^T(b)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y)b(y) dy = - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \log(|x-y|)b(y) dy, \quad (3.11)$$

onde  $b \in C_\delta(\Omega)$  e  $\Phi$  é a solução fundamental para a equação de Laplace. A partir daí, toma-se a restrição de  $u^T(b)$  sobre  $\Gamma$  e utiliza-se esta informação em ambos os problemas auxiliares. Logo, estes problemas são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u^D = b \quad \text{em } \Omega \\ u^D = u^* \quad \text{sobre } \Gamma_m \\ u^D = u^T(b) \quad \text{sobre } \Gamma \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u^N = b \quad \text{em } \Omega \\ -\partial_n u^N = q^* \quad \text{sobre } \Gamma_m \\ u^N = u^T(b) \quad \text{sobre } \Gamma \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Note que o problema correspondente ao dado de Neumann é compatível, o que descarta a necessidade da introdução de condições de unicidade e compatibilidade. De maneira análoga ao que foi feito para o caso de domínio limitado, será resolvido um problema de otimização equivalente ao problema inverso, de modo que o funcional a ser minimizado é dado por (3.1). Novamente, sobre a solução do problema inverso, este funcional atinge valor mínimo, ou seja, aqui também vale o teorema 3.1.

### 3.2.2 Análise de sensibilidade

Perturba-se a fonte dos problemas auxiliares (3.12), adicionando a esta fonte,  $m$  cargas pontuais, com intensidades  $\alpha_i$  e localizadas nos pontos  $x_i$ , de modo que se obtém a fonte perturbada  $b_\delta$  dada por (3.3). Como consequência desta perturbação, surgem dois problemas perturbados associados aos problemas auxiliares. Tais problemas são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_\delta^D = b_\delta \quad \text{em } \Omega \\ u_\delta^D = u^* \quad \text{sobre } \Gamma_m \\ u_\delta^D = u^T(b_\delta) \quad \text{sobre } \Gamma \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_\delta^N = b_\delta \quad \text{em } \Omega \\ -\partial_n u_\delta^N = q^* \quad \text{sobre } \Gamma_m \\ u_\delta^N = u^T(b_\delta) \quad \text{sobre } \Gamma \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Considerando as relações (3.5), segue que as funções  $v_i$  e  $h_i$  são soluções de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta v_i = \delta_i \quad \text{em } \Omega \\ v_i = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_m \\ v_i = \Phi_i \quad \text{sobre } \Gamma \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta h_i = 0 \quad \text{em } \Omega \\ -\partial_n h_i = \partial_n v_i \quad \text{sobre } \Gamma_m \\ h_i = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Para fazer a análise de sensibilidade do funcional de forma, será calculada a variação total deste funcional. A partir daí, obtém-se (3.6), que é quadrática com relação à intensidade. Derivando a variação do funcional com respeito a  $\alpha_i$  e anulando, obtém-se o seguinte sistema:

$$H_{ki} \alpha_i^* = d_k, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (3.15)$$

onde  $H_{ki}$  e  $d_k$  são dadas por (3.9). Substituindo as intensidades ótimas  $\alpha_i^*$  na variação do funcional, obtém-se

$$\mathcal{J}(u_\delta^D, u_\delta^N) - \mathcal{J}(u^D, u^N) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i^* d_i. \quad (3.16)$$

A partir desta equação, faz-se uma busca em todo o domínio  $\Omega$  pelos pontos  $x_i^*$  que minimizam a função  $G$ .

## 4 Resultados numéricos

Nesta seção, serão apresentados alguns resultados numéricos referentes à resolução do sistema (3.8), ou seja, obtidos apenas para o caso em que o domínio de definição do problema inverso é limitado. Em todos os exemplos, o domínio  $\Omega$  é dado por um quadrado  $(-0.5, 0.5) \times (-0.5, 0.5)$ , e utilizou-se elementos finitos lineares triangulares na resolução numérica. Nas figuras subsequentes, os círculos representam as cargas que constituem cada fonte, de modo que o centro indica o ponto onde a carga é aplicada e o raio é proporcional à intensidade.

O primeiro exemplo trata da reconstrução da fonte representada pela figura 1. Como foi visto anteriormente, os cálculos permitem calcular apenas a intensidade e a localização das cargas pontuais. Este

exemplo serve para explicar a metodologia utilizada para determinar a quantidade ótima de cargas ( $m^*$ ). Em resumo, toma-se  $m$  de forma crescente, até o momento em que se observa que uma das cargas possui intensidade desprezível. A partir deste procedimento, obtém-se a solução do problema de otimização, representada pela figura 2(b). Note que esta solução coincide com a solução do problema inverso, representada pela figura 1.

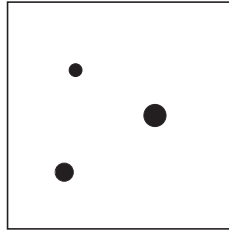
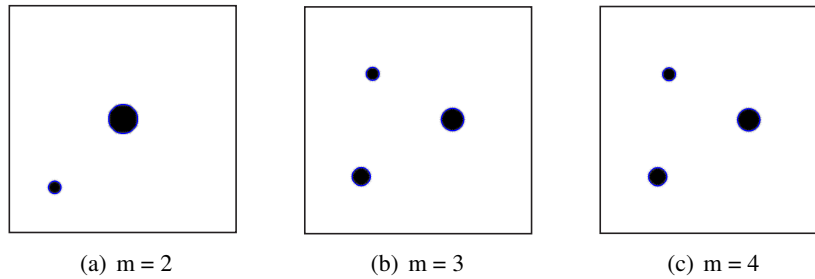


Figura 1: Exemplo 1: Target



No próximo exemplo, assume-se que  $m^*$  é conhecido *a priori* e acrescenta-se ruído à leitura  $q^*$ . Isto é feito porque esta leitura foi obtida de maneira puramente sintética, o que pode mascarar eventuais instabilidades do método proposto. O ruído imposto é do tipo gaussiano branco, com níveis de 4%, 8% e 16%, representados pelas figuras 3(a), 3(b) e 3(c), respectivamente. A partir de 16% de ruído, observou-se deslocamento nas localizações dos pontos ótimos, bem como variação nas intensidades ótimas.

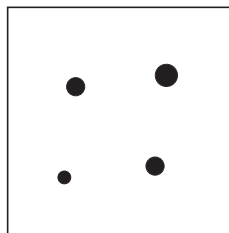
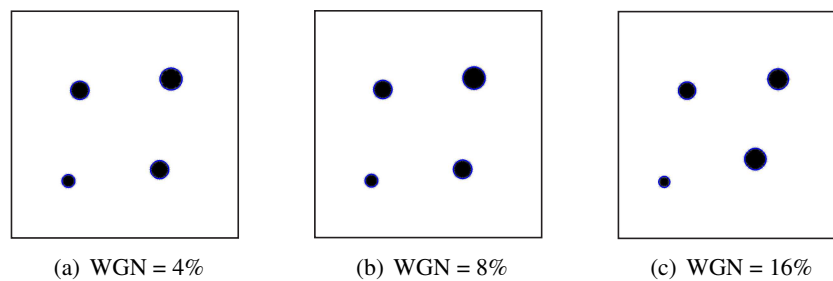


Figura 2: Exemplo 2: Target



## 5 Conclusão

Ao estudar o problema inverso do potencial para o caso de fonte pontual, o resultado obtido através do processo de reconstrução via minimização do funcional de Kohn-Vogelius coincidiram com a solução do problema inverso. A equivalência entre o problema inverso e o problema de otimização foi confirmada através dos exemplos numéricos. Vale ressaltar, ainda, a robustez a ruído do método. Isto se deve, principalmente, à não iteratividade do processo de reconstrução e ao fato da variação do funcional não possuir resíduo.

**Palavras-chave:** *Equações Diferenciais Parciais, Análise de Sensibilidade, Problema Inverso do Potencial, Critério de Kohn-Vogelius*

## Referências

- [1] El Badia and Ha-Duong. An inverse source problem in potential analysis. *Inverse Problems*, 16:651–663, 2000.
- [2] El Badia and Ha-Duong. On an inverse problem for the heat equation, with application to identifying a pollution source. *Inverse Ill-Posed Problems*, 10:585–599, 2002.
- [3] Faugeras O et al. The inverse eeg and meg problems: the adjoint space approach. *Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique*, 1999.
- [4] S. He and V. G. Romanov. Identification of dipole sources in a bounded domain for maxwell's equations. *Wave Motion*, 28:25–40, 1998.
- [5] V. Isakov. *Inverse source problems*. American Mathematical Society, Providence - Rhode Island, 1990.