

## Aplicação do Método das Diferenças Finitas na Solução de um Problema de Deflexão em Viga com Carregamento Concentrado

**Cleber E. F. Leal    Giovanni M. A. Sobrinho    Adilandri M. Lobeiro    Viviane Colucci**

Departamento Acadêmico de Matemática, DAMAT, UTFPR

87301-899, Campus Campo Mourão, PR

E-mail: cleber.efl@hotmail.com, giovani.eng-civil@hotmail.com, alobeiro@utfpr.edu.br, coluccivivi@gmail.com

**Clicia Geovana Alves Pereira**

**Juan Amadeo Soriano Palomino**

Departamento de Ciências, DCI, UEM

Departamento de Matemática, DMA, UEM

87360-000, Campus Goioerê, PR

E-mail: cgapereira2@uem.br, jaspalomino@uem.br

### RESUMO

A deformação vertical (deflexão) que uma viga apresenta quando submetida a um carregamento pode ser encontrada a partir da Equação Diferencial (ED) da linha elástica (1), dada por

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}, \quad (1)$$

sendo  $w(x)$  a função que fornece a deflexão em cada ponto da viga,  $M(x)$  a função momento fletor,  $E$  o módulo de elasticidade do material que compõe a viga e  $I$  é a inércia da seção transversal. Devido a grande complexidade dos projetos atuais, muitos dos *softwares* empregados por engenheiros civis no dimensionamento de estruturas são baseados em métodos numéricos. Para mostrar tal relação, o objetivo deste trabalho é obter e comparar as soluções analítica e a numérica da ED da linha elástica para a Viga de comprimento  $L$  Biapoiada com Carregamento Concentrado  $P$ .

Como a carga se encontra no meio do vão entre os apoios, têm-se duas funções  $M(x)$ , uma para  $0 \leq x \leq L/2$  e a outra para  $L/2 \leq x \leq L$ . O processo será descrito para  $0 \leq x \leq L/2$ , já que para  $L/2 \leq x \leq L$  os cálculos são análogos. A função momento para esse primeiro intervalo é  $M(x) = -(P/2)x$ , e, substituindo-a em (1), obtém-se (2), que é a ED da linha elástica para este problema. A solução analítica de (2) é (3), obtida com as condições de contorno  $w(0) = 0$  e  $w(L/2) = -(PL^3)/(48EI)$ .

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{Px}{2EI} \text{ para } 0 \leq x \leq L/2 \quad (2)$$

e

$$w(x) = \frac{P}{4EI} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{L^2x}{4} \right) \text{ para } 0 \leq x \leq L/2. \quad (3)$$

Para o método de diferenças finitas, dividiu-se a viga em  $n$  subintervalos de tamanho  $h$ , sendo que cada extremo desses subintervalos foi chamado de  $x_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  (onde,  $x_0 = 0$  e  $x_n = L/2$ ). Foi usada a aproximação (4) (por diferenças centradas) para a derivada segunda

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2}, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4)$$

onde  $w_i$  é o valor aproximado da deflexão em cada ponto  $x_i$  em  $0 \leq x \leq L/2$ . Das condições de contorno vem que  $w_0 = 0$  e  $w_n = -(PL^3)/(48EI)$ . Com isso, aplica-se (4) em (2), monta-se um sistema de  $n-1$  equações e, quando se resolve, obtém-se os valores de  $w_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Para  $L/2 \leq x \leq L$ , a função momento fletor é  $M(x) = (P/2) \cdot (x - L)$  e a ED da linha elástica (5) e sua solução analítica (6) são descritas abaixo. Quanto à solução numérica, manteve-se o valor de  $h$  e a aproximação (4) para (5) com a ressalva que, agora,  $x_0 = L/2$ ,  $x_n = L$ ,  $w_0 = -(PL^3)/(48EI)$  e  $w_n = 0$ . Monta-se outro sistema para esta situação e resolve-se, encontrando os valores de  $w_i$  para cada  $x_i$  em  $L/2 \leq x \leq L$ .

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{P}{2EI}(x - L), \text{ para } L/2 \leq x \leq L, \tag{5}$$

e

$$w(x) = \frac{P}{4EI} \left( -\frac{x^3}{3} + Lx^2 - \frac{3L^2x}{4} + \frac{L^3}{12} \right), \text{ para } L/2 \leq x \leq L. \tag{6}$$

Então, os dois problemas foram implementados em um algoritmo no *MAPLE* com os valores  $P = 15$  kN,  $L = 4,00$  m,  $E = 12 \cdot 10^6$  kN/m<sup>2</sup>,  $I = 1 \cdot 10^{-4}$  m<sup>4</sup> e  $h = 0,1$  m. Assim, obteve-se a Figura 1, que mostra os gráficos das soluções analítica e numérica. Os valores da deflexão a cada 0,5 m são comparados na Tabela 1, por meio dos erros absoluto e percentual.

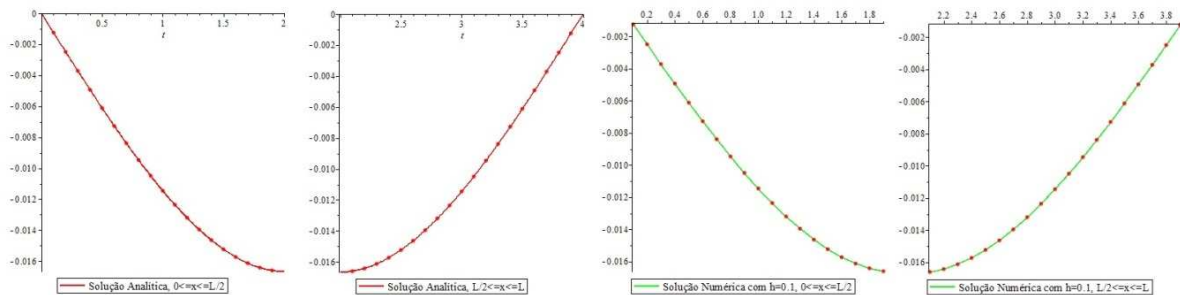


Figura 1: Gráficos da Solução Analítica e da Solução Numérica para os dois Trechos.

Tabela 1: Comparação dos Valores da Solução Analítica e da Solução Numérica.

$x_i$	$w(x_i)$	$w_i$	Erro absoluto	Erro Percentual
0,0	0,000000000	0,000000000	0,000000000	—
0,5	0,611979167	0,611979167	0,000000000	0,000000000
1,0	1,145833333	1,145833334	0,000000001	0,000000087
1,5	1,523437500	1,523437500	0,000000000	0,000000000
2,0	1,666666667	1,666666667	0,000000000	0,000000000
2,5	1,523437500	1,523437500	0,000000000	0,000000000
3,0	1,145833333	1,145833334	0,000000001	0,000000087
3,5	0,611979167	0,611979167	0,000000000	0,000000000
4,0	0,000000000	0,000000000	0,000000000	—

Nota-se que o método é preciso, visto que os erros calculados foram tecnicamente nulos. Um grande número de casos pode ser analisado pelo algoritmo usado, já que se pode variar as cargas.

**Palavras-chave:** Equações diferenciais, Diferenças finitas, Deflexão em vigas.

## Referências

- [1] R. L. Burden, J. D. Faires, “Análise Numérica”, São Paulo, Pioneira Thomson Learning, 2003.
- [2] S. C. Chapra, R. P. Canale, “Métodos Numéricos para Engenharia”, São Paulo, McGraw-Hill, 2008.
- [3] R. C. Hibbeler, “Resistência dos Materiais”, 5ª ed., São Paulo, Prentice Hall, 2004.