Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

$L(2,1)$-coloração de k-árvores e grafos com *treewidth* limitado

Gabriel F. Barros **Daniel F. D. Posner**
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação/COPPE-Universidade Federal do Rio de Janeiro
21941-972, Rio de Janeiro, RJ
E-mail: gbarros@cos.ufrj.br, posner@cos.ufrj.br

Márcia R. Cerioli
Instituto de Matemática - Universidade Federal do Rio de Janeiro
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação/COPPE-Universidade Federal do Rio de Janeiro
21941-972, Rio de Janeiro, RJ
E-mail: cerioli@cos.ufrj.br

Resumo: *Uma $L(2,1)$-coloração de um grafo $G = (V, E)$ é uma atribuição f de inteiros não-negativos em V tal que, se $uv \in E$, então $|f(u) - f(v)| \geq 2$; além disso, se $uv \in E$, $vw \in E$ e $u \neq w$, então $f(u) \neq f(w)$. O span de f é o maior inteiro utilizado, e λ é o menor span dentre os de todas as $L(2,1)$-colorações de G. Neste trabalho, melhoramos a cota superior conhecida para λ em k-árvores e fornecemos uma cota superior alternativa para λ em grafos com treewidth limitado. Nossos resultados restringem possíveis contraexemplos para a conjectura de Griggs e Yeh, a qual afirma que $\lambda \leq \Delta^2$ para todo grafo com $\Delta \geq 2$.*

Palavras-chave: *L(2,1)-coloração, k-árvores, grafos com treewidth limitado*

Griggs e Yeh [7] definiram uma $L(2,1)$-coloração de um grafo G como uma função f que atribui números inteiros não-negativos aos vértices de G de tal forma que, se dois vértices são adjacentes, as suas cores diferem de pelo menos duas unidades e, se dois vértices tem um vizinho em comum, então suas cores são diferentes. O maior inteiro utilizado nesta atribuição é o seu *span*. O *span mínimo* dentre os de todas as $L(2,1)$-colorações de um grafo é denotado por λ.

A motivação para o estudo deste tipo especial de coloração de vértices de um grafo surgiu com a necessidade de estabelecer cenários mais realistas para o Problema de Atribuição de Frequências a redes de transmissores sem fio do que os até então utilizados (que consistiam em uma coloração usual de vértices). Exemplos de redes de transmissão de rádio são: redes de telefonia celular, provedores de *internet* via rádio, redes de satélites, etc. A Figura 1 ilustra uma rede de transmissão sem fio e a modelagem do problema utilizando L(2,1)-coloração.

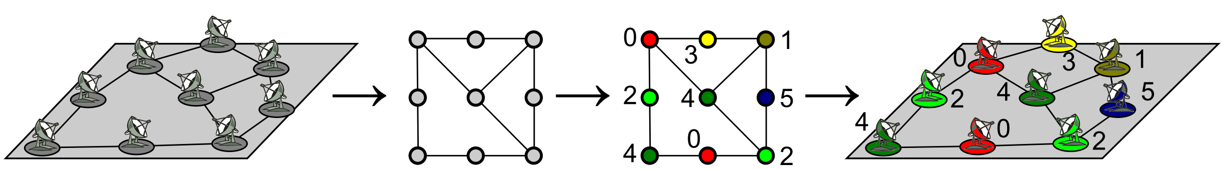

Figura 1: Uma rede de transmissão sem fio com uma $L(2,1)$-coloração de *span* 5.

Dado um grafo e um inteiro c, o problema de decidir se $\lambda \leq c$ é NP-completo [7], e não se conhece uma cota superior justa para λ em grafos gerais. Griggs e Yeh [7] conjecturaram que este valor é Δ^2 para grafos com $\Delta \geq 2$, onde Δ é o grau máximo do grafo. Esta conjectura continua em aberto, mesmo se restrita a grafos bipartidos. Entretanto, até hoje o melhor limite superior conhecido é $\Delta^2 + \Delta - 2$, obtido por Gonçalves [6]. Os únicos grafos conhecidos com $\Delta \geq 3$ para os quais $\lambda = \Delta^2$ são o grafo de Petersen e o grafo Hoffman-Singleton. Também está em aberto encontrar uma família de grafos infinita (diferente de grafos ciclos e grafos caminhos) tal que os grafos da família satisfazem $\lambda = \Delta^2 - c$ [3], onde $c \geq 0$ é uma constante.

O tema $L(2,1)$-coloração tem despertado interesse, e a Tabela 1 apresenta cotas superiores para λ em classes de grafos.

Classes	Limite
árvores	$\lambda \leq \Delta + 2$ Griggs e Yeh [7]
bipartido permutação	$\lambda \leq wb(G) + 1$ Araki [1]
cocomparabilidade	$\lambda \leq 4\Delta - 1$ Calamoneri *et al.* cf. [3]
cografo	$\lambda \leq 2\Delta$ C. e P. [4]
diâmetro 2	$\lambda \leq \Delta^2$ Griggs e Yeh [7]
fracamente cordal	$\lambda \leq \Delta^2$ C. e P. [5]
intervalo	$\lambda \leq 2\Delta$ Calamoneri *et al.* [3]
linha	$\lambda \leq \min\{\frac{\Delta^2+4\Delta-2}{2}, \Delta^2\}$ C. e P. [4]
permutação	$\lambda \leq 4\Delta - 3$ C. e P. [4]
planar	$\lambda \leq 2\Delta + 25$ van den Heuvel e McGuinness [10]
split	$\lambda \leq 0.385\Delta^{1.5} + 2\Delta + \Delta^{0.5} - 2$ C. e P. [5]
cordal	$\lambda \leq \frac{(\Delta+1)^{1.5}}{\sqrt{6}} + \Delta + 1$ Král [8]
q-partido	$\lambda \leq n + q - 2$ Griggs e Yeh [7]

Tabela 1: Cotas superiores para λ em classes de grafos

Em nosso trabalho, determinamos uma cota superior para λ em k-árvores, melhorando o resultado de Bodlaender *et al.* [2]. Além disso, estabelecemos uma cota superior para λ alternativa à dada por Bodlaender *et al.* [2] em grafos com *treewidth* limitado. Este resultado restringe possíveis contraexemplos da conjectura de Griggs e Yeh.

Definições e notações

Seja $G = (V, E)$ um grafo (V é um conjunto finito e não vazio e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos pertencentes a V). A *vizinhança* de um vértice v, denotada por $N(v)$, é o conjunto dos vértices que são adjacentes a v em G. O *grau* de um vértice v, denotado por $d(v)$, é dado pela cardinalidade de sua vizinhança. Denota-se por Δ o *maior grau* de G, isto é, $\Delta = \max_{v \in V}\{d(v)\}$. A *distância* entre os vértices u e v de G, denotada por $d(u,v)$, é o número de arestas em um menor caminho entre esses vértices. Considere $N_2(v)$ o conjunto de vértices de G que estão a distância 2 de v. Dada uma ordenação dos vértices de G, seja $N^a(v)$ o conjunto de vértices adjacentes a v que o precedem na ordenação, $N^d(v)$ o conjunto de vértices adjacentes a v que o sucedem, $N_2^a(v)$ o conjunto de vértices à distância 2 de v que o precedem na ordenação e $N_2^d(v)$ o conjunto de vértices à distância 2 de v que o sucedem.

Um grafo H é *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. O *subgrafo de um grafo G induzido por S*, onde $S \subseteq V(G)$ e $S \neq \emptyset$, denotado por $G[S]$, é o subgrafo de G cujo conjunto de vértices é S e cujas arestas são as arestas de G que têm ambos os extremos em S.

Um grafo é *completo* se quaisquer dois de seus vértices são adjacentes. Um vértice v é *simplicial* se o subgrafo induzido pela sua vizinhança é um grafo completo.

k-Árvores

Um grafo é uma k-árvore se é um grafo completo de k vértices ou se é obtido a partir de uma k-árvore adicionando um vértice simplicial de grau k. A classe das 1-árvores é equivalente à das árvores. A Figura 2 ilustra o processo de obtenção de uma 3-árvore.

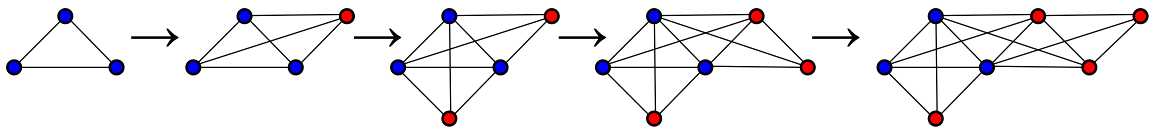

Figura 2: Uma 3-árvore.

Bodlaender *et al.* [2] provaram que, para k-árvores, $\lambda \leq k(\Delta - k + 3)$, e este limite é justo para árvores. Neste trabalho, reduzimos essa cota no caso em que $k \geq 2$ (para $k = 1$, assim como a cota conhecida, nossa cota é $\Delta + 2$).

Seja G uma k-árvore. A sequência de adições de vértices simpliciais de grau k nos fornece uma ordenação dos vértices de G com propriedades que são interessantes para determinar um limite superior para λ. Dizemos que uma ordenação de $V(G)$ tem *a propriedade* π se ela é uma sequência de adições de vértices simpliciais que leva à construção de G. Em outras palavras, $O = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ possui a propriedade π se $G[\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}]$ é um grafo completo e, para $k + 1 \leq i \leq n$, a vizinhança de v_i em $G[\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}]$ é um grafo completo de k vértices.

Dada uma ordenação $O = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ de $V(G)$ com a propriedade π, seja $K = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, e seja H o subgrafo de G induzido por K e pelos vértices adjacentes a pelo menos dois vértices de K. No caso da 3-árvore da Figura 2, H contêm todos os vértices a menos do vértice mais à direita. A seguir, estabelecemos algumas propriedades úteis de H.

Lema 1. *Seja G uma k-árvore, e O uma ordenação de $V(G)$ com a propriedade π. Então, $|V(H)| \leq k + \frac{k}{2}(\Delta - k + 1)$.*

Demonstração. Cada $u \in V(H) \setminus K$ satisfaz $|N(u) \cap K| \geq 2$, e cada $v \in K$ satisfaz $|N(v) \setminus K| \leq \Delta - k + 1$. Logo, $|V(H) \setminus K| \leq \frac{k}{2}(\Delta - k + 1)$. □

Lema 2. *Seja G uma k-árvore. Então, existe uma ordenação de $V(G)$ com a propriedade π tal que os vértices de $V(G) \setminus V(H)$ sucedem os vértices de H.*

Demonstração. Seja $O = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ uma ordenação de G com a propriedade π. Se O satisfaz o lema, então este está provado. Suponha então que existem $v_i, v_j \in V(G)$ tais que $v_i \in V(G) \setminus V(H)$, $v_j \in V(H) \setminus K$ e $i < j$. Vamos construir uma ordenação $O' = \langle v'_1, v'_2, \ldots, v'_n \rangle$ tal que O' possui a propriedade π, $v_i = v'_q$, $v_j = v'_p$ e $p < q$. De início, defina $v'_t = v_t$ para cada $1 \leq t \leq n$. Suponha por contradição que $v_i v_j \in E(G)$. Como $|N(v_j) \cap K| \geq 2$ e $|N(v_i) \cap K| \leq 1$, o subgrafo induzido por $N(v_j) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}$ não é um grafo completo, um absurdo. Portanto, $v_i v_j \notin E(G)$.

Denominemos um caminho P um *caminho t-ascendente* se todos os vértices de P pertencem a $\{v_t, v_{t+1}, \ldots, v_n\}$. Seja G_i o subgrafo de G induzido por $\{w \in \{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\} \mid$ existe um caminho i-ascendente de extremos v_i e $w\}$. Note que, para todo $v_k \in V(G_i)$, $v_k \in V(G) \setminus V(H)$. Observe também que, se, para algum $v_k \in \{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$, $N(v_k) \cap V(G_i) \neq \emptyset$, então $v_k \in V(G_i)$. Transponha os vértices de $V(G_i)$ para as últimas posições de O' mantendo a ordem relativa entre eles; ou seja, $\{v'_{n-|V(G_i)|+1}, \dots, v'_n\} = V(G_i)$ e, para $v'_p, v'_q \in V(G_i)$ tais que $v'_p = v_r$ e $v'_q = v_s$, temos que $p < q \Leftrightarrow r < s$.

Digamos que $v_i = v'_q$ e que $v_j = v'_p$. Vemos que $p < q$. Suponha por contradição que O' não tem a propriedade π. Logo, para algum r e s tais que $r < s$, existem $v_s \in V(G) \setminus V(G_i)$ e $v_r \in V(G_i)$ tais que $v_r v_s \in E(G)$. Mas, v_s ser adjacente a um vértice em $V(G_i)$ implica que $v_s \in V(G_i)$, um absurdo. Logo, O' tem a propriedade π. Observe que $v'_t = v_t$ para cada $1 \le t \le k$.

Repetindo o raciocínio para todo $v'_i, v'_j \in V(G)$ tais que $v'_i \in V(G) \setminus V(H)$, $v'_j \in V(H) \setminus K$ e $i < j$, concluímos que O' é uma ordenação que possui a propriedade π na qual os vértices de $V(G) \setminus V(H)$ sucedem os vértices de H. $\square$

Lema 3. *Seja G uma k-árvore, e $O = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ uma ordenação de $V(G)$ com a propriedade π. Então, para todo $v \in V(G) \setminus V(H)$, $|N_2^a(v)| \le k(\Delta - k) - \frac{k}{2}(k-1)$.*

Demonstração. Considere algum $v_j \in V(G) \setminus V(H)$. Para todo $v_i \in N_2^a(v_j)$, temos que, para todo v_k que é vizinho comum de v_i e v_j, $v_k \in N^a(v_j)$, pois, se $v_k \in N^d(v_j)$, então $v_i v_j \in E(G)$. Temos que $|N^a(v_j)| = k$. Sejam $w_1, w_2, \dots, w_k$ os vizinhos de v_j que o precedem em O, ordenados conforme O; ou seja, se $w_p = v_r$ e $w_q = v_s$, então $p < q \Leftrightarrow r < s$. Como $v_j \in V(G) \setminus V(H)$, temos que $\{w_2, w_3, \dots, w_k\} \cap K = \emptyset$. Logo, existe $w'_k \in N^a(w_k)$ tal que $G[\{w_1, \dots, w_{k-1}, w'_k\}]$ é completo; existe $w'_{k-1} \in N^a(w_{k-1})$ tal que $w'_{k-1} \neq w'_k$ e w'_{k-1} é adjacente a todos os vértices de $\{w_1, w_2, \dots, w_{k-1}\}$; existe $w'_{k-2} \in N^a(w_{k-2})$ tal que $w'_{k-2} \notin \{w'_{k-1}, w'_k\}$ e w'_{k-2} é adjacente a todos os vértices de $\{w_1, w_2, \dots, w_{k-2}\}$; ...; e existe $w'_2 \in N^a(w_2)$ tal que $w'_2 \notin \{w'_3, w'_4, \dots, w'_k\}$ e w'_2 é adjacente a w_1 e w_2. Portanto, $|N_2^a(v_j)| \le \sum_{i=1}^{k}[(\Delta - k) - (i-1)] = k(\Delta - k) - \frac{k}{2}(k-1)$. $\square$

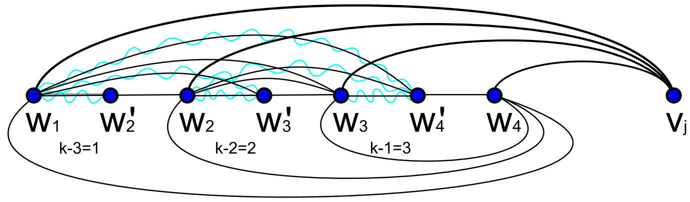

Figura 3: Redução da contagem do número máximo de vértices em $N_2^a(v_j)$, $v_j \in V(G) \setminus V(H)$.

Lema 4 ([7]). *Seja G um grafo. Então, $\lambda(G) \le |V(G)| + \chi(G) - 2$, onde $\chi(G)$ é o número cromático de G.*

Teorema 5. *Seja G uma k-árvore. Então, $\lambda(G) \le \max\{k(\Delta - k + 3) - \frac{k}{2}(k-1), \frac{k(\Delta-k+3)}{2} + k - 1\}$.*

Demonstração. Seja $O = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ uma ordenação de $V(G)$ com a propriedade π. Definimos uma $L(2,1)$-coloração de G em duas partes: primeiro atribuímos cores aos vértices de $V(H)$, depois aos vértices de $V(G) \setminus V(H)$. O *span* da $L(2,1)$-coloração de G é o máximo dentre os *spans* das $L(2,1)$-colorações de H e de $G[V(G) \setminus V(H)]$.

Pelo Lema 4, $\lambda(H) \le |V(H)| + \chi(H) - 2$. Pelo Lema 2, podemos assumir, sem perda de generalidade, que os vértices de $V(G) \setminus V(H)$ sucedem os vértices de H. Portanto, $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_{|V(H)|}\}$ e H é uma k-árvore. Logo, $\chi(H) \le k+1$. Pelo Lema 1, $|V(H)| \le k + \frac{k}{2}(\Delta - k + 1)$.

Então, $\lambda(H) \le k + \frac{k}{2}(\Delta - k + 1) + (k+1) - 2 = \frac{k(\Delta-k+3)}{2} + k - 1$ e existe uma $L(2,1)$-coloração f de H cujo *span* é no máximo $\frac{k(\Delta-k+3)}{2} + k - 1$. Para cada $1 \le i \le |V(H)|$, no i-ésimo passo, atribuímos a cor $f(v_i)$ a v_i e, para cada $|V(H)| + 1 \le i \le n$, no i-ésimo passo, atribuímos a v_i a menor cor possível, respeitando as restrições de uma $L(2,1)$-coloração.

Considere v_i, para algum $|V(H)| + 1 \le i \le n$. Cada $v_j \in N^a(v_i)$ proíbe no máximo 3 cores a v_i e cada $v_j \in N_2^a(v_i)$ proíbe sua cor a v_i. Portanto, no i-ésimo passo, o número máximo de cores proibidas a v_i é $3k + k(\Delta - k) - \frac{k}{2}(k-1) = k(3 + \Delta - k) - \frac{k}{2}(k-1)$. Assim, existe pelo menos uma cor disponível para v_i em $\{0, 1, \dots, k(\Delta - k + 3) - \frac{k}{2}(k-1)\}$. $\square$

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0241

Analisemos o valor de $\phi = \max\{k(\Delta - k + 3) - \frac{k}{2}(k-1), \frac{k(\Delta-k+3)}{2} + k - 1\}$. Temos que, se $\phi = k(\Delta - k + 3) - \frac{k}{2}(k-1)$, então $\Delta \leq 2k - 3$. Seja $O = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ uma ordenação de $V(G)$ com a propriedade π. Suponha que $V(G) \setminus V(H) \neq \emptyset$. Então, existe em G um caminho $P = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$ tal que $N^a(w_1) = K$; $N^a(w_2)$ possui exatamente $k-1$ vértices pertencentes a $N^a(w_1)$; $N^a(w_3)$ possui exatamente $k-2$ vértices pertencentes a $N^a(w_1)$; $\ldots$; e $N^a(v_k)$ possui exatamente 1 vértice pertencente a $N^a(w_{k-1})$. Logo, para algum $v \in K$, $d(v) \geq 2k-1$. Portanto, $\Delta \geq 2k - 1$ e $\phi = k(\Delta - k + 3) - \frac{k}{2}(k-1)$. Desta forma, temos o seguinte corolário.

Corolário 6. *Seja G uma k-árvore, e O uma ordenação de $V(G)$ com a propriedade π. Se $V(G) \setminus V(H) \neq \emptyset$, então $\lambda(G) \leq k(\Delta - k + 3) - \frac{k}{2}(k-1)$.*

Um grafo é *cordal* se é um grafo completo ou se é obtido a partir de um grafo cordal adicionando um vértice simplicial. Logo, toda k-árvore é um grafo cordal. Král [8] provou que $\lambda \leq O(\Delta^{1.5})$ para grafos cordais e, portanto, esse limite se estende para k-árvores e evidencia que k-árvores satisfazem a conjectura de Griggs e Yeh. Observamos que o limite do Teorema 5 é assintoticamente melhor de que o de Král se $k < O(\Delta^{0.5})$.

Grafos com *treewidth* limitado

O *treewidth* de um grafo G, denotado por $tw(G)$, é o mínimo k para o qual G é subgrafo de uma k-árvore. A classe dos grafos com *treewidth* 1 equivale à das florestas. O grafo da Figura 4 tem *treewidth* 2, já que é um subgrafo de uma 2-árvore, mas não é de uma 1-árvore.

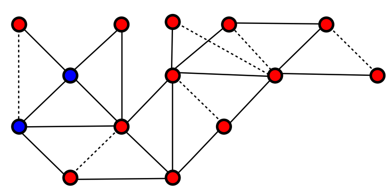

Figura 4: Grafo G com *treewidth* 2 (as arestas pontilhadas são da 2-árvore da qual G é subgrafo).

Seja G um grafo tal que $tw(G) = k$. Bodlaender *et al.* [2] provaram que $\lambda(G) \leq k(\Delta + 2)$, e este limite é justo para árvores. Estabelecemos outro limite utilizando o *método de McDiarmid*. Este método, proposto em [9], é uma variação da atribuição gulosa, que também utiliza uma ordenação dos vértices, porém, tenta-se atribuir os vértices às cores. Ao aplicar tal método em uma $L(2,1)$-coloração, obtém-se $\lambda(G) \leq \max_{v \in V(G)}\{2\,|N^a(v)| + |N^d(v)| + |N_2^a(v)|\}$.

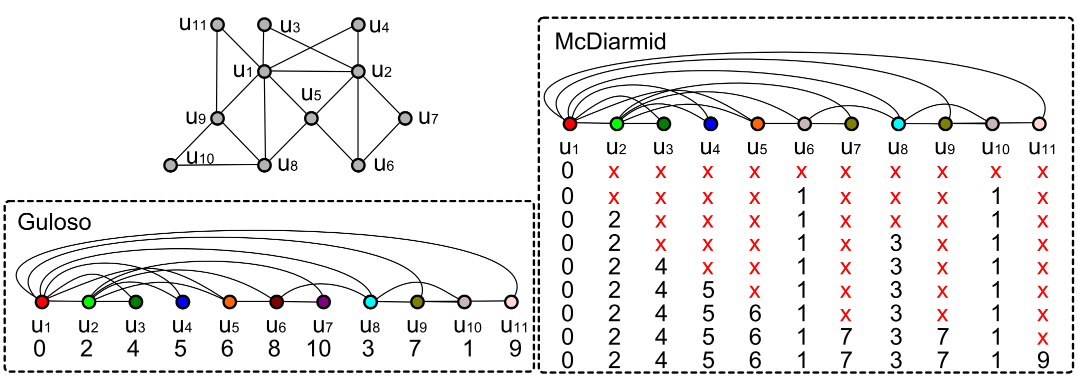

Figura 5: Uma $L(2,1)$-coloração gulosa e de McDiarmid para os vértices de um grafo.

Teorema 7. *Para um grafo G com $tw(G) = k$, $\lambda(G) \leq \Delta(k+1)$.*

Demonstração. Seja H uma k-árvore tal que $V(H) = V(G)$ e G é subgrafo de H. Seja $O = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ uma ordenação de $V(H)$ com a propriedade π. Considere v_i para algum $1 \leq i \leq n$.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0241

Para cada $v_j \in N_2^a(v_i)$ tal que existe um vizinho comum $v_{j'} \in N^d(v)$, temos que $v_iv_j \in E(H)$ ($N_2^a(v_i)$, $N^d(v_i)$ e $N^a(v_i)$ definidos com relação às vizinhanças em G). Seja q_i o número de vértices deste tipo. Temos que $|N^a(v_i)| = k - q_i$. Assim, $\max_{v_i \in V(G)}\{2|N^a(v_i)| + |N^d(v_i)| + |N_2^a(v_i)|\} \leq \max_{v_i \in V(G)}\{2(k - q_i) + (\Delta - k + q_i) + (k - q_i)(\Delta - 1) + q_i\} \leq \Delta(k + 1)$. Portanto, $\lambda(G) \leq \Delta(k + 1)$. □

Este resultado é particularmente interessante, porque dele se conclui que, para grafos com *treewidth* no máximo $\Delta - 1$, a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira. Por exemplo, a conjectura é verdadeira para qualquer grafo com *treewidth* 3 e $\Delta \geq 4$. Outro modo de ver é que um grafo com *treewidth* 3 só pode ser um contraexemplo para a conjectura de Griggs e Yeh se $\Delta \leq 3$.

Corolário 8. *Para um grafo G com $tw(G) \leq \Delta - 1$, $\lambda(G) \leq \Delta^2$.*

Demonstração. Pelo Teorema 7, $\lambda(G) \leq \Delta(tw(G) + 1)$. Como $tw(G) \leq \Delta - 1$, $\lambda(G) \leq \Delta^2$. □

Conclusões e trabalhos futuros

Para k-árvores, o limite superior de Bodlaender *et al.* [2] foi obtido encontrando uma ordenação especial dos vértices da k-árvore, aplicando um algoritmo guloso de $L(2,1)$-coloração que tem esta ordenação como entrada e analisando para um vértice genérico o número de cores proibidas a ele. Usamos uma ideia semelhante para obtermos uma redução desta cota. As duas principais diferenças foram: (1) consideramos uma ordenação de vértices que tem propriedades adicionais e (2) particionamos o conjunto de vértices da k-árvore em dois subconjuntos e analisamos uma $L(2,1)$-coloração tal que a cor de um determinado vértice depende da parte à qual pertence.

Também consideramos os grafos com *treewidth* limitado. Para esta classe, estabelecemos uma cota superior alternativa para o *span* mínimo usando uma ordenação especial dos vértices do grafo e um método proposto por McDiarmid [9]. Por meio deste resultado, concluímos que possíveis contraexemplos para a conjectura de Griggs e Yeh têm *treewidth* no máximo $\Delta - 1$ ou, em outra palavras, concluímos a existência de uma família de grafos infinita que satisfaz tal conjectura.

Estamos trabalhando atualmente na verificação da existência de grafos que tornem nossas cotas superiores justas. Outro problema em aberto é investigar se vale a conjectura de Griggs e Yeh para grafos com *treewidth* pequeno, já que a conjectura está em aberto mesmo para *treewidth* 3. Para *treewidth* 1 (florestas), Griggs e Yeh [7] provaram que $\lambda \leq \Delta + 2$, que é um limite justo. Para *treewidth* 2, pelo Corolário 8, somente grafos com $\Delta \leq 2$ podem ser contraexemplos para a conjectura. Mas, Griggs e Yeh provaram que, para grafos com $\Delta \leq 2$, $\lambda \leq 4$ [7].

Agradecimentos

Este trabalho conta com o financiamento da CAPES, CNPq e FAPERJ, sob a forma de projetos de pesquisa e bolsas de estudo.

Referências

[1] T. Araki, Labeling bipartite permutation graphs with a condition at distance two, *Discrete Applied Mathematics*, 157 (2009) 1677-1686.

[2] H. L. Bodlaender, T. Kloks, R. B. Tan e J. Van Leewen, Approximations for λ-coloring of graphs, *The Computer Journal*, 47 (2000) 193-204.

[3] T. Calamoneri, The $L(h,k)$-labelling problem: a survey and annotated bibliography, *The Computer Journal*, 54 (2011) 1344-1371.

[4] M. Cerioli e D. Posner, Limites superiores para o *span* de λ-colorações ótimas nos cografos, grafos de permutação e grafos linha, *Anais do XXXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Cuiabá - MT* (2009) 489-495.

[5] M. Cerioli e D. Posner, On λ-coloring split, chordal bipartite and weakly chordal graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 160 (2012) 2655-2661.

[6] D. Gonçalves, On the $L(p,1)$-labeling of graphs, *Discrete Mathematics*, 308 (2008) 1405-1414.

[7] J. R. Griggs e R. K. Yeh, Labeling graphs with a condition at distance 2, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 5 (1992) 586-595.

[8] D. Král, Coloring powers of chordal graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 18 (2004) 451-461.

[9] C. McDiarmid, On the span in channel assignment problems: bounds, computing and counting, *Discrete Mathematics*, 266 (2003) 387-397.

[10] J. van den Heuvel e S. McGuinness, Colouring the square of a planar graph, *Journal of Graph Theory*, 42 (2003) 110-124.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0241