Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

A Minimalidade $\mathbb{P}$-MDS e a Identidade de Minimalidades $\mathbb{P}$-MDS para códigos lineares com a métrica poset.

Me. Marcelo Augusto Leocádio
Associação Educacional Dom Bosco - AEDB
Departamento de Engenharia Elétrica,
27.523-000, Resende-RJ.
E-mail: marcelo.leocadio@ufv.br.

Dr. Allan de Oliveira Moura
Universidade Federal de Viçosa - UFV
Departamento de Matemática, Campus Viçosa,
36500-000, Viçosa-MG.
E-mail: allan.moura@ufv.br.

Resumo: *Nesse trabalho mostramos a existência de um novo parâmetro para códigos lineares não degenerados sobre a métrica poset, a minimalidade $\mathbb{P}$-MDS de C. A partir dai, enunciamos e demonstramos o Teorema da Minimalidade $\mathbb{P}$-MDS de C e o Teorema da Variância $\mathbb{P}$-MDS de C. Uma das consequências da definição desse parâmetro é a Identidade de Minimalidades $\mathbb{P}$-MDS de C, que relaciona a minimalidade, a distância mínima e a dimensão de C e $C^{\perp}$.*

Palavras-chave: *Códigos Poset, P-peso generalizado, minimalidade P-MDS, variância P-MDS, identidade de minimalidades P-MDS.*

1 Introdução

A Teoria de Códigos Corretores de Erros foi iniciada por C.E. Shannon e por R.W. Hamming, respectivamente, nos trabalhos *A Mathematical Theory of Communication* e *Error Detecting and Error Correcting Codes*, ambos publicados no *The Bell System Technical Journal*. A partir dai, a Teoria de Códigos Corretores de Erros teve um desenvolvimento significativo, sendo utilizada até hoje em aplicações que vão desde a gravação de dados em um DVD, até programas espaciais do JPL (Jet Propulsion Laboratory) e da NASA (National Aeronautics and Space Administration).

V.K. Wei, em [7], generalizou o peso de Hamming de um código para seus subespaços. O peso generalizado de Hamming de um subespaço é o número de coordenadas que não se anulam nas palavras do subespaço. Para cada dimensão temos um peso mínimo generalizado e o conjunto desses pesos é chamado de hierarquia de pesos do código. Wei derivou algumas propriedades básicas da hierarquia, como a Monotonicidade, a cota de Singleton e encontrou uma certa identidade de MacWillians para a hierarquia de pesos, a Dualidade de Wei, utilizada para calcular os pesos generalizados de um código e de seu código dual.

Brualdi, Graves e Lawrence, em [1], obtiveram uma métrica ponderada por uma ordem parcial (poset), na qual a métrica de Hamming e a de Niederreider são casos particulares dessa métrica, dando origem assim aos espaços poset. O grande avanço na Teoria de Códigos com a introdução das métricas ponderadas foi que, alguns códigos que na métrica de Hamming não eram perfeitos passaram a ser perfeitos na métrica poset. A partir dai, diversos autores generalizaram esses conceitos e resultados para o caso poset, como o peso generalizado, a Monotonicidade e a Cota de Singleton em [1], e a Dualidade de Wei em [3].

Em [2], utilizando conceitos de I-bolas e códigos I-perfeitos, J.Y. Hyun e H.K. Kim demonstram que um código é $\mathbb{P}$-MDS, se e somente, seu código dual é $\widetilde{\mathbb{P}}$-MDS. Esse resultado não pode ser extendido para o conceito de peso generalizado definido por Wei, pois existem códigos que são $(\mathbb{P}, r)$-MDS, sem que seu código dual seja $(\widetilde{\mathbb{P}}, r)$-MDS. Dessa forma, nesse trabalho buscamos encontrar uma relação do resultado demonstrado em [2], com o conceito de peso generalizado para o caso poset. A partir disso, mostramos que podemos relacionar o menor $r \in [n]$ de forma que um código é $(\mathbb{P}, r)$-MDS, com a distância mínima de seu código dual. Assim, definimos um novo parâmetro para códigos lineares sobre a métrica poset, a Minimalidade $\mathbb{P}$-MDS, além de, enunciar e demonstrar o Teorema da Minimalidade $\mathbb{P}$-MDS e o Teorema da Variância $\mathbb{P}$-MDS. Como consequência, obtemos uma identidade que relaciona a Minimalidade $\mathbb{P}$-MDS, a distância mínima e a dimensão de um código e de seu código dual.

2 Preliminares

As seguintes notações serão utilizadas nesse trabalho, como referência indicamos [7], [6], [1], [4], [2] e [3].

- $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$;
- $\mathbb{F}_q^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_q$, um corpo finito com q elementos;
- $C \subset \mathbb{F}_q^n$ é um código linear se é um subespaço de $\mathbb{F}_q^n$;
- $supp(x) = \{i; x_i \neq 0\}$, para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n$;
- $supp(D) = \bigcup_{x \in D} supp(x)$, onde $D \subset \mathbb{F}_q^n$;
- $\mathbb{P}$=$([n], \leq_{\mathbb{P}})$, onde $\leq_{\mathbb{P}}$ é uma ordem parcial sobre $[n]$;
- $\widetilde{\mathbb{P}}$=$([n], \leq_{\widetilde{\mathbb{P}}})$, onde $\widetilde{\mathbb{P}}$ é o poset dual de $\mathbb{P}$, isto é, se $i \leq_{\mathbb{P}} j$ então $j \leq_{\widetilde{\mathbb{P}}} i$;
- $I \subset \mathbb{P}$ é um ideal de $\mathbb{P}$ se, $i \in I$, $j \in \mathbb{P}$ e $j \leq_{\mathbb{P}} i$ então $j \in I$;
- Se $A \subset [n]$, $\langle A \rangle_{\mathbb{P}} = \{i; i \leq_{\mathbb{P}} j, j \in A\}$;

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0239 010239-2

- $\omega_{\mathbb{P}}(x) = \mid \langle supp(x) \rangle_{\mathbb{P}} \mid$ e $\omega_{\mathbb{P}}(D) = \mid \langle supp(D) \rangle_{\mathbb{P}} \mid$;
- $d_{\mathbb{P}}(x, y) = \omega_{\mathbb{P}}(x - y)$ e $d_{\mathbb{P}}(C) = min\{\ d_{\mathbb{P}}(x, y); x, y \in C \setminus \{0\}\}$;
- $d_r^{\mathbb{P}}(C) := min\{\omega_{\mathbb{P}}(D); D \subset C, dim D = r\}$;

Teorema 2.1. [*4*]*[Monotonicidade] Seja C um $[n,k]_q$ $\mathbb{P}$-código, então*

$$1 \leq d_1^{\mathbb{P}}(C) < d_2^{\mathbb{P}}(C) < \ldots < d_k^{\mathbb{P}}(C) \leq n.$$

Teorema 2.2. [*4*]*[Cota de Singleton generalizada] Seja C um $[n,k]_q$ $\mathbb{P}$-código, então*

$$r \leq d_r^{\mathbb{P}}(C) \leq n - k + r.$$

Definição 2.3 ([5], [7])**.** *Um $[n,k]_q$ $\mathbb{P}$-código C é dito $(\mathbb{P}, r)$-**MDS** se $d_r^{\mathbb{P}}(C) = n - k + r$.*

Teorema 2.4. [*3*]*[Dualidade de Wei] Sejam C um $[n,k]_q$ $\mathbb{P}$-código e $C^{\perp}$ seu dual. Se*

$$X := \{d_1^{\mathbb{P}}(C), d_2^{\mathbb{P}}(C), \ldots, d_k^{\mathbb{P}}(C)\} \ e$$

$$Y := \{n + 1 - d_1^{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}), n + 1 - d_2^{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}), \ldots, n + 1 - d_{n-k}^{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp})\},$$

então

$$X \cup Y = [n] = \{1, 2, \ldots, n\} \quad e \quad X \cap Y = \emptyset.$$

3 Minimalidade $\mathbb{P}$-MDS de C

Definição 3.1. *Um código C é dito **degenerado** se existe uma matriz geradora de C com uma coluna nula. Caso contrário ele é dito **não degenerado**.*

Seja C um $[n,k]_q$ $\mathbb{P}$-código $(\mathbb{P}, r)$-MDS não degenerado. O Teorema da Monotonicidade e a Cota de Singleton nos garantem que C é $(\mathbb{P}, t)$-MDS para $r < t \leq k$, pois,

$$d_r^{\mathbb{P}}(C) = n - k + r < d_{r+1}^{\mathbb{P}}(C) \leq n - k + r + 1 \Rightarrow d_{r+1}^{\mathbb{P}}(C) = n - k + r + 1.$$

Assim, torna-se natural perguntar qual o menor $j \in [n]$ de forma que C é $(\mathbb{P}, j) - MDS$. Dessa forma, definimos.

Definição 3.2. *A **minimalidade $\mathbb{P}$-MDS de** C é o menor $j \in [n]$ de forma que C é $(\mathbb{P}, j) - MDS$, e será denotada por $\mu_{\mathbb{P}}(C)$.*

Teorema 3.3. *[[3]] Se C é um $[n,k]_q$ $\mathbb{P}$-código não degenerado, então C é $(\mathbb{P}, k) - MDS$.*

Observe que o teorema 3.3 garante que o parâmetro $\mu_{\mathbb{P}}(C)$ está bem definido para códigos não degenerados e $1 \leq \mu_{\mathbb{P}}(C) \leq k$. Agora mostraremos como esse novo parâmetro está relacionado com a distância mínima do código dual de C.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0239 010239-3

Teorema 3.4. *[Teorema da Minimalidade $I\!P$-MDS] Seja C um $[n,k]_q$ $I\!P$-código não degenerado, então*

$$\mu_{I\!P}(C) = r \text{ se, e somente se, } d_1^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp) = k - r + 2.$$

Demonstração 3.5. *Seja C um $[n,k]_q$ $I\!P$-código não degenerado, com $\mu_{I\!P}(C) = r$. Então*

$$d_r^{I\!P}(C) = n - k + r,$$
$$d_{r+1}^{I\!P}(C) = n - k + r + 1,$$
$$\vdots$$
$$d_k^{I\!P}(C) = n$$

e

$$d_{r-1}^{I\!P}(C) < n - k + r - 1.$$

Se X é a hierarquia de $I\!P$-pesos de C, então

$$X = \{d_1^{I\!P}(C), d_2^{I\!P}(C), \ldots, d_{r-1}^{I\!P}(C), n-k+r, n-k+r+1, \ldots, n\} \quad e \quad n-k+r-1 \notin X.$$

Pelo Teorema da Dualidade Poset, se

$$Y = \{n+1-d_{n-k}^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp), n+1-d_{n-k-1}^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp), \ldots, n+1-d_1^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp)\}, \text{ então}$$

$$X \cup Y = [n] \text{ e } X \cap Y = \emptyset.$$

Logo $n-k+r-1 \in Y$ e $n-k+r-1 = max\ Y$, pois $\{n-k+r, n-k+r+1, \ldots, n\} \subset X$. Pelo Teorema da Monotonicidade Poset, temos

$$n+1-d_{n-k}^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp) < n+1-d_{n-k-1}^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp) < \ldots < n+1-d_1^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp).$$

Como $n-k+r-1 = max\ Y$, segue que

$$n-k+r-1 = n+1-d_1^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp) \Rightarrow d_1^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp) = k-r+2.$$

Reciprocamente, seja C um $[n,k]_q$ $I\!P$-código não degenerado com $d_1^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp) = k-r+2$. Seja Y a hierarquia de $\widetilde{I\!P}$-pesos de $C^\perp$,

$$Y = \{d_1^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp), d_2^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp), \ldots, d_{n-k}^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp)\}.$$

Pelo Teorema da Monotonicidade Poset, como $d_1^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp) < d_2^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp) < \ldots < d_{n-k}^{\widetilde{I\!P}}(C^\perp)$, então $\{1, 2, \ldots, k-r+1\}$ não está contido em Y. Pelo Teorema da Dualidade Poset, se

$$X = \{n+1-d_1^{I\!P}(C), n+1-d_2^{I\!P}(C), \ldots, n+1-d_k^{I\!P}(C)\}, \text{ então}$$

$$X \cup Y = [n] \text{ e } X \cap Y = \emptyset.$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0239 010239-4

Assim, $\{1, 2, \ldots, k-r+1\} \subseteq X$ *e* $k-r+2 \notin X$.
O Teorema da Monotonicidade Poset nos garante que,

$$n+1-d_k^{\mathbb{P}}(C) < n+1-d_{k-1}^{\mathbb{P}}(C) < \ldots < n+1-d_1^{\mathbb{P}}(C).$$

Logo,

$$n+1-d_k^{\mathbb{P}}(C) = 1 \Rightarrow d_k^{\mathbb{P}}(C) = n.$$
$$n+1-d_{k-1}^{\mathbb{P}}(C) = 2 \Rightarrow d_{k-1}^{\mathbb{P}}(C) = n-1.$$
$$\vdots$$
$$n+1-d_r^{\mathbb{P}}(C) = k-r+1 \Rightarrow d_r^{\mathbb{P}}(C) = n-k+r.$$

Dessa forma C *é* $(\mathbb{P}, r)-MDS$ *e* $\mu_{\mathbb{P}}(C) \leq r$. *Como* $k-r+2 \notin X$, *temos*

$$n+1-d_{r-1}^{\mathbb{P}}(C) > k-r+2 \Rightarrow d_{r-1}^{\mathbb{P}}(C) < n-k+r-1.$$

Portanto, r *é o menor número tal que* C *é* $(\mathbb{P}, r)-MDS$, *ou seja,* $\mu_{\mathbb{P}}(C) = r$. □

4 Variância $\mathbb{P}$-MDS de C

Definição 4.1. *Um* $\mathbb{P}$*-código* C *será dito* ***dualmente não degenerado*** *se, e somente se,* C *e* $C^{\perp}$ *são não degenerados.*

Esta definição visa somente nomear a classe de códigos onde C e $C^{\perp}$ são não degenerados, pois dessa forma $\mu_{\mathbb{P}}(C)$ e $\mu_{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp})$ estão bem definidos em decorrência de C ser $(\mathbb{P}, k)-MDS$ e $C^{\perp}$ ser $(\widetilde{\mathbb{P}}, n-k)-MDS$.

Definição 4.2. *Dado* C *um* $\mathbb{P}$*- código dualmente não degenerado, definimos a* ***variância*** ***$\mathbb{P}$-MDS*** *de* C, *denotado por* $\Delta_{\mathbb{P}}(C)$, *como sendo o número inteiro*

$$\Delta_{\mathbb{P}}(C) = \mu_{\mathbb{P}}(C) - \mu_{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}).$$

Observe que $k-n+2 \leq \Delta_{\mathbb{P}}(C) \leq k-2$ e $\Delta_{\mathbb{P}}(C) = -\Delta_{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp})$.

Teorema 4.3. *[Teorema da Variância* $\mathbb{P}$*-MDS] Seja* C *um* $[n, k]_q$ $\mathbb{P}$*-código dualmente não degenerado. Então* $\Delta_{\mathbb{P}}(C) = d_1^{\mathbb{P}}(C) - d_1^{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) - n + 2k$.

Demonstração 4.4. *Seja* C *um* $[n, k]_q$ $\mathbb{P}$*-código dualmente não degenerado e considere* $\Delta_{\mathbb{P}}(C) = \mu_{\mathbb{P}}(C) - \mu_{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp})$ *a variância* $\mathbb{P}$*-MDS de* C. *Pelo Teorema da Minimalidade* $\mathbb{P}$*-MDS, temos*

$$\mu_{\mathbb{P}}(C) = k - d_1^{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) + 2 \quad e \quad \mu_{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) = n - k - d_1^{\mathbb{P}}(C) + 2.$$

Portanto,

$$\Delta_{\mathbb{P}}(C) = k - d_1^{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) + 2 - (n - k - d_1^{\mathbb{P}}(C) + 2) = d_1^{\mathbb{P}}(C) - d_1^{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) - n + 2k. \square$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0239 010239-5

Teorema 4.5. *Se C é um $[n,k]_q$ $\mathbb{P}$-código dualmente não degenerado, então C satisfaz a igualdade*

$$\mu_{\mathbb{P}}(C) - \mu_{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) = d_{\mathbb{P}}(C) - d_{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) + dim\ C - dim\ C^{\perp}. \quad (1)$$

Demonstração 4.6. *Seja C um $[n,k]_q$ $\mathbb{P}$-código dualmente não degenerado e considere $\mu_{\mathbb{P}}(C)$ e $\mu_{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp})$ as minimalidades de C e $C^{\perp}$.*

Pelo Teorema da Variância $\mathbb{P}$-MDS de C e pela definição de $\Delta_{\mathbb{P}}(C)$, temos

$$\Delta_{\mathbb{P}}(C) = d_1^{\mathbb{P}}(C) - d_1^{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) - n + 2k \quad e \quad \Delta_{\mathbb{P}}(C) = \mu_{\mathbb{P}}(C) - \mu_{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp})$$

Igualando $\Delta_{\mathbb{P}}(C)$, obtemos $\mu_{\mathbb{P}}(C) - \mu_{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) = d_1^{\mathbb{P}}(C) - d_1^{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) - n + 2k$. Portanto,

$$\mu_{\mathbb{P}}(C) - \mu_{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) = d_{\mathbb{P}}(C) - d_{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) + dim\ C - dim\ C^{\perp}.\square$$

A igualdade (1) será chamada **Identidade de Minimalidades $\mathbb{P}$-MDS** de C.

Teorema 4.7. *[2] Sejam C um $[n,k]_q$ $\mathbb{P}$-código e $C^{\perp}$ seu código dual. Então*

$$C \text{ é } \mathbb{P} - MDS \quad \text{se, e somente se, } C^{\perp} \text{ é } \widetilde{\mathbb{P}} - MDS.$$

Demonstração 4.8. *Seja C um $[n,k]_q$ $\mathbb{P}$-código MDS, então $d_{\mathbb{P}}(C) = d_1^{\mathbb{P}}(C) = n-k+1$, ou seja, $\mu_{\mathbb{P}}(C) = 1$. Pelo Teorema da Minimalidade $\mathbb{P}$-MDS de C, temos*

$$d_1^{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) = k - \mu_{\mathbb{P}}(C) + 2 = k + 1.$$

Logo $C^{\perp}$ é $\widetilde{\mathbb{P}}$-MDS.

Reciprocamente, seja $C^{\perp}$ um $[n, n-k]_q$ $\widetilde{\mathbb{P}}$-código MDS, então

$$d_1^{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) = k + 1.$$

Pelo Teorema da Minimalidade $\mathbb{P}$-MDS de C, temos

$$d_1^{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) = k - \mu_{\mathbb{P}}(C) + 2 \Rightarrow \mu_{\mathbb{P}}(C) = 1.$$

Portanto, C é $\mathbb{P}$-MDS.$\square$

Definição 4.9 ([3], [7])**.** *A $\mathbb{P}$-discrepância de C, denotada por $\delta_{\mathbb{P}}(C)$, é o menor inteiro $s \in [n]$, tal que $d_{s+1}^{\mathbb{P}}(C) > n - k$.*

Teorema 4.10. *Seja C um $[n,k]_q$ $\mathbb{P}$-código não degenerado, então*

$$\delta_{\mathbb{P}}(C) < \mu_{\mathbb{P}}(C).$$

Demonstração 4.11. *Seja C um $[n,k]_q$ $\mathbb{P}$-código não degenerado com $\mu_{\mathbb{P}}(C) = r$, ou seja, $d_r^{\mathbb{P}}(C) = n-k+r$. Como $n-k < n-k+r = d_r^{\mathbb{P}}(C)$, a definição de $\mathbb{P}$-discrepância de C nos garante que $\delta_{\mathbb{P}}(C) + 1 \leq r$. Portanto,*

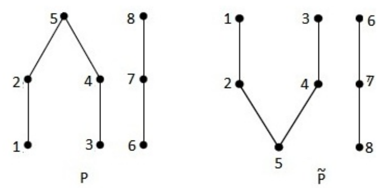
$$\delta_{\mathbb{P}}(C) \leq \mu_{\mathbb{P}}(C) - 1 < \mu_{\mathbb{P}}(C).\square$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0239 010239-6

5 Exemplo

Sejam $\mathbb{P}$ e $\widetilde{\mathbb{P}}$ os posets como abaixo e C o $[8,6]_2$ $\mathbb{P}$-código dado pela matriz G.

$$G = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1 \end{pmatrix}$$



Uma matriz que gera $C^{\perp}$, o $\widetilde{\mathbb{P}}$-código dual de C é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora, $d_1^{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) = \omega_{\widetilde{\mathbb{P}}}(01011011) = 5$. Pelo Teorema da Minimalidade $\mathbb{P}$-MDS, temos

$$d_1^{\widetilde{\mathbb{P}}}(C^{\perp}) = 5 = 6 - \mu_{\mathbb{P}}(C) + 2 \Rightarrow \mu_{\mathbb{P}}(C) = 3.$$

Logo, $d_3^{\mathbb{P}}(C) = n - k + 3 = 8 - 6 + 3 = 5$ e $d_4^{\mathbb{P}}(C) = 6$, $d_5^{\mathbb{P}}(C) = 7$ e $d_6^{\mathbb{P}}(C) = 8$. Considerando X a hierarquia de $\mathbb{P}$-pesos de C, temos $X = \{d_1^{\mathbb{P}}(C), d_2^{\mathbb{P}}(C), 5, 6, 7, 8\}$ e $d_2^{\mathbb{P}}(C) < 4$. Como $C^{\perp}$ é não degenerado, então $d_1^{\mathbb{P}}(C) > 1$, assim $d_1^{\mathbb{P}}(C)$ e $d_2^{\mathbb{P}}(C)$ são elementos do conjunto $\{2, 3\}$. Portanto $X = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$.

Referências

[1] R.A. Brualdi, J. S. Graves e K. M. Lawrence, Codes with a poset metric, *Discrete Math*, v. 147, pp.57-72, 1995.

[2] J.Y. Hyun e H.K. Kim, Maximum distance separable poset codes, *Codes Cryptografy - Springer*, v. 48, pp.247-261, 2008.

[3] A.O. Moura e M. Firer, Duality for poset codes, *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. 56, nº 7, pp.3180-3186, 2010.

[4] L. Panek e M. Firer, Codes satisfying the chain condition with a poset weights, *Preprint CooR*, 2012.

[5] L. Panek, E. Lazarotto e F.M. Bando, Codes satisfying the chain condition over rosenbloom-tsfasman spaces, *Int. J. Pure Appl. Math.*, v. 48, pp.217-222, 2008.

[6] M.Yu. Rosenbloom e M.A. Tsfasman, Codes for m-metric, *Problem Pederachy Informatsii*, v. 33, pp.55-63, 1992.

[7] V.K. Wei, Generalized Hamming Weights for Linear Code, *IEEE Trans. Inform. Theory*, v. 37, pp.1412-1418, 1991.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0239