Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Número de Ramsey multicolorido em Grafos Multipartidos

Juliana Sanches
Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada - UFRGS
91509-900, Porto Alegre, RS
E-mail: juu.sanches@gmail.com
Emerson L. M. Carmelo
Departamento de Matemática - UEM
87020-900, Maringá, PR
E-mail: elmcarmelo@uem.br

Resumo: *O número de Ramsey multipartido (cardinalidade das classes) em bicolorações foi introduzido por Day, Goddard, Henning e Swart em 2001. Em 2004 Burger e van Vuuren sistematizaram e formalizaram problemas extremais associados à classe de grafos multipartidos. Neste trabalho estendemos esta variante do número de Ramsey para um número arbitrário de cores. Propriedades de crescimento, conexões com a teoria de Ramsey clássica, limitantes inferiores e superiores foram obtidos.*

Palavras-chave: *grafo multipartido, coloração de arestas, teoria de Ramsey*

1 Introdução

Seja K_r o grafo completo com r vértices. Dados inteiros positivos $n_1 \geq 2$ e $n_2 \geq 2$ lembramos que o célebre número de Ramsey $r(n_1, n_2)$ denota o menor natural r tal que toda bicoloração das arestas de K_r, usando as cores vermelho e azul, apresenta cópia vermelha de K_{n_1} ou cópia azul de K_{n_2}. Determinar os números de Ramsey tem sido um grande desafio na teoria dos grafos. De fato, somente são conhecidos alguns valores exatos deste número: $r(2,2) = 2$, $r(3,3) = 6$, e $r(4,4) = 18$, mas $r(5,5)$ ainda é um problema aberto. Desde o artigo de Ramsey em 1930, algumas contribuições tem se concentrado em determinar limitantes superiores e inferiores, por exemplo, $43 \leq r(5,5) \leq 49$. Tabelas atualizadas dos limitantes estão disponíveis em [11].

Muitos conceitos, variantes e extensões foram introduzidas com o intuito de ajudar no cálculo dos números de Ramsey: número de Ramsey bipartido, número de Ramsey generalizado, etc (veja [7]). Para a nossa proposta, mencionamos a seguinte extensão: o número de Ramsey multicolorido $r(n_1, \ldots, n_k)$ é o menor natural r tal que toda k-coloração de arestas de K_r apresenta pelo menos uma cópia monocromática de K_{n_i} na cor i, para $1 \leq i \leq k$. Se $n_i = n$ para todo i, este número é denotado por $r(n; k)$. Por exemplo: $r(3; 2) = r(3,3) = 6$, o valor único conhecido de um multicolorido número Ramsey clássica é $r(3; 3) = r(3,3,3) = 17$, e $51 \leq r(3; 4) \leq 62$, conforme [11].

Em particular, Day, Goddard, Henning e Swart [5] estudaram colorações de grafos com mais de duas classes. Eles introduziram o Número de Ramsey Multipartido (cardinalidade das classes). Por sua vez, Burger e van Vuuren [4] sistematizaram e formalizaram problemas extremais associados à classe de grafos multipartidos. Seja $K_{s\times c}$ o grafo completo multipartido balanceado com s classes de cardinalidade c. Dados inteiros positivos s, $n_1 \geq 2$, p_1, $n_2 \geq 2$, e p_2 o *número multipartido de Ramsey (cardinalidade de classes)* $m_s(K_{n_1\times p_1}, K_{n_2\times p_2})$ é o menor natural c tal que toda bicoloração de arestas de $K_{s\times c}$, utilizando as cores vermelho e azul, apresenta uma cópia vermelha de $K_{n_1\times p_1}$ ou uma cópia azul de $K_{n_2\times p_2}$. Estes números podem ser considerados como uma extensão dos números de Ramsey clássicos. Observe que $r(n_1, n_2) = a$ implica

$m_a(K_{n_1\times 1}, K_{n_2\times 1}) = 1$. Note também que $m_2(K_{2\times n_1}, K_{2\times n_2}) = b(n_1, n_2)$, neste sentido este número de Ramsey generaliza o número Ramsey bipartido $b(n_1, n_2)$, onde este número denota o menor natural b tal que toda bicoloração das arestas de $K_{2\times b}$ apresenta cópia monocromática de $K_{2\times n_1}$ na cor vermelha ou cópia azul de $K_{2\times n_2}$ (vide [8]).

Vários resultados sobre os números de Ramsey em multipartidos são apresentados em [4], alguns deles em conexão com os números clássicos $r(n_1, n_2)$. Além disso, os limitantes gerais são obtidos, incluindo um limite inferior usando o método probabilístico.

Neste trabalho estendemos o número de Ramsey multipartido (cardinalidade das classes) para um número arbitrário de cores, como descrevemos na próxima seção. Discutimos as conexões com os números de Ramsey multicoloridos. Vários resultos em [4] foram estendidos, incluindo generalizações de limitantes superiores e inferiores.

2 Definições e existência

O grafo $K_{s\times c}$ denota o grafo mutipartido com s classes de cardinalidade c

$$K_{s\times c} = K_{c,c,\ldots,c} \ \ (s \text{ times}).$$

Observe que $K_{n\times 1} = K_n$, mas $K_{1\times n}$ denota o complementar de K_n (n vértices isolados).

Dados números naturais s, n_i, p_i, com $1 \leq i \leq k$. O *número de Ramsey multipartido multicolorido (cardinalidade das classes)* $m_s(K_{n_1\times p_1}, \ldots, K_{n_k\times p_k})$ é o menor natural c tal que qualquer k-coloração arbitrária das arestas de $K_{s\times c}$ contém uma cópia monocromática de $K_{n_i\times p_i}$ na cor i, para algum $1 \leq i \leq k$.

No caso diagonal: $n_i = n$ e $p_i = p$ para todo i, com $1 \leq i \leq k$, é simplesmente denotado por $m_s(K_{n\times p}; k)$. Neste trabalho consideraremos preferencialmente o caso diagonal.

Observemos que $r(n; k) = a$ implica $m_a(K_{n\times 1}; k) = 1$. Ou seja, podemos dizer que o número de Ramsey multipartido multicolorido é uma extensão do número de Ramsey clássico multicolorido. Notemos também que $m_2(K_{2\times n}; k) = b(n; k)$, em particular, este número de Ramsey generaliza o número de Ramsey bipartido multicolorido.

A existência deste número está condicionada a um valor da função de Ramsey clássica multicolorida. A versão para duas cores do resultado a seguir foi obtida por Burger e van Vuuren [4].

Teorema 1 *Dados $n, k \geq 2$ e $p \geq 1$ números naturais arbitrários, o número de Ramsey multipartido multicolorido $m_s(K_{n\times p}; k)$ existe se, e somente se $s \geq r(n; k)$.*

2.1 Explicando a existência

Para dar a ideia da demonstração do Teorema 1, e para relacionar o número multipartido com o número clássico de Ramsey, defini-se um novo conceito: a chamada coloração expansiva, descrita abaixo.

Definição 2 *Uma coloração de arestas de $K_{s\times c}$ é chamada* coloração expansiva *se, para cada par de classes de $K_{s\times c}$, as arestas entre todos os vértices destas duas classes têm a mesma cor.*

Um fato crucial segue: toda coloração expansiva de $K_{s\times c}$ corresponde a uma coloração de arestas de K_s (isto pode ser feito identificando cada classe de $K_{s\times c}$ por um único vértice). Neste caso, dizemos que uma coloração expansiva de $K_{s\times c}$ é induzida por uma coloração correspondente de K_s.

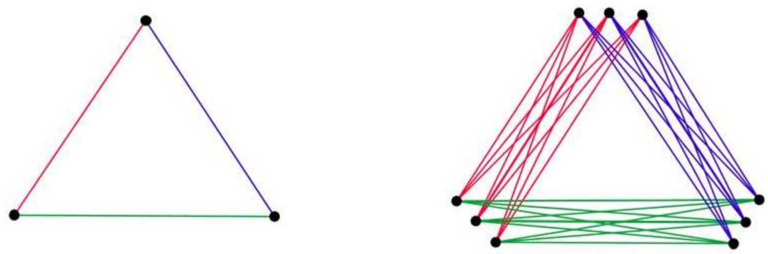

Figura 1: Coloração expansiva de $K_{3\times 3}$ induzida por uma coloração de K_3

Esboço da demonstração do Teorema 1: Queremos mostrar que $m_s(K_{n\times p};k)$ existe, se e somente, $s \geq r(n;k)$. Seja $r = r(n;k)$. Primeiramente, suponhamos que $s \geq r(n;k)$. A ideia da demonstração é garantir a existência de um c "suficientemente grande"tal que qualquer k-coloração de $K_{r\times c}$ contém um subgrafo $K_{r\times d}$ cuja coloração é expansiva e $d \geq p$. Dessa forma pela definição de r existe um $K_{n\times d}$ monocromático e como $K_{n\times p} \subseteq K_{n\times d}$, segue que $K_{r\times c}$ contém cópia monocromática de $K_{n\times p}$. Para provar a recíproca, provamos que $m_s(K_{n\times p};k)$ não existe se $s < r(n;k)$. Como $r(n;k) > s$, existe uma k-coloração de K_s desprovida de cópia monocromática de K_n. Assim a coloração expansiva de $K_{s\times c}$ induzida por essa coloração de K_s não contém K_n monocromático. Consequentemente, $K_{s\times c}$ com essa coloração não contém $K_{n\times p}$ monocromático.

3 Relações e propriedades de crescimento

A fim de prosseguirmos com a análise do número de Ramsey multipartido, precisamos calcular a cardinalidade mínima de cada classe de $G = K_{s\times c}$ para que G contenha obrigatoriamente um $K_{n\times p}$ como subgrafo. Afirmamos que este número é $\lceil p/\lfloor s/n \rfloor \rceil$.

Com efeito, seja c o menor natural satisfazendo $K_{n\times p} \subseteq K_{s\times c}$. Quaisquer dois vértices de mesma classe de $K_{s\times c}$ não podem pertencer a classes distintas de $K_{n\times p}$. Isto significa que para obtermos $K_{n\times p}$ como subgrafo de $K_{s\times c}$, devemos agrupar classes inteiras de $K_{s\times c}$ com o intuito de formarmos n novas classes. Desse modo, cada grupo deve conter $\lfloor s/n \rfloor$ classes de $K_{s\times c}$. Para assegurarmos que existem p vértices em cada grupo, cada classe de $K_{s\times c}$ deverá conter pelo menos $\lceil p/\lfloor s/n \rfloor \rceil$ vértices.

Exemplo 3 *Para $s \geq n \geq 2$, $p \geq 1$ arbitrários,*

(1) $m_s(K_{2\times 1}, \ldots, K_{2\times 1}, K_{n\times p}) = \lceil p/\lfloor s/n \rfloor \rceil$.

De fato, consideremos $K_{s\times\lceil p/\lfloor s/n\rfloor\rceil} = G$ com uma k-coloração arbitrária. Se esta coloração contém alguma aresta na cor i^*, para alguma cor i^* com $1 \leq i^* \leq k-1$, o grafo G obrigatoriamente contém um $K_{2\times 1}$ monocromático. Caso contrário, todas as arestas de G são da cor k, consequentemente, G apresenta cópia monocromática de $K_{n\times p}$. E mais, $m_s(K_{2\times 1}, \ldots, K_{2\times 1}, K_{n\times p}) > \lceil p/\lfloor s/n \rfloor \rceil - 1$. Coloridas as arestas de $K_{s\times(\lceil p/\lfloor s/n\rfloor\rceil-1)} = H$ todas com a cor k, o grafo H não contém $K_{2\times 1}$ na cor i^* com $1 \leq i^* \leq k-1$, e não contém $K_{n\times p}$ monocromático.

(2) $m_s(K_{n\times 1};k) = 1$, *com $s \geq r(n;k)$.*

Com efeito, seja $r = r(n;k)$ e suponhamos $s \geq r$. Consideremos uma k-coloração arbitrária de $K_{s\times 1}$. Como $K_{r\times 1} \subseteq K_{s\times 1}$, esta coloração induz uma k-coloração de $K_{r\times 1} \approx K_r$. Pela definição de r, K_r apresenta cópia de K_n para alguma cor i^*. Consequentemente, o grafo $K_{s\times 1}$ apresenta cópia de K_n.

O próximo resultado apresenta uma propriedade de crescimento, que é uma generalização de um resultado em [4]

Proposição 4 *Dados números naturais $u, n, k \geq 2$ e s, v, p. Valem:*

(1) $m_s(K_{n\times p}; k) \leq m_s(K_{u\times v}; k)$ *sempre que $n \leq u$ e $p \leq v$ (quando ambos os números existem).*

(2) $m_s(K_{n\times p}; k) \leq m_q(K_{n\times p}; k)$ *se $q \leq s$ (quando ambos os números existem).*

Prova: (1) Suponhamos a existência de $c = m_s(K_{u\times v}; k)$. Seja uma k-coloração arbitrária de $K_{s\times c}$. Por hipótese, existe uma cópia monocromática de $K_{u\times v}$ para alguma cor i. Como $K_{n\times p} \subseteq K_{u\times v}$ o grafo $K_{s\times c}$ contém uma cópia monocromática de $K_{n\times p}$.

(2) Seja $c = m_q(K_{n\times p}; k)$ um número finito. Consideremos $K_{s\times c}$ com uma k-coloração arbitrária. Como $q \leq s$, obrigatoriamente $K_{q\times c} \subseteq K_{s\times c}$. Assim, esta coloração induz uma k-coloração de $K_{q\times c}$. Pela definição de c, o grafo $K_{q\times c}$ contém uma cópia monocromática de $K_{n\times p}$ para alguma cor i. Consequentemente, $K_{s\times c}$ também a contém. ∎

A proposição anterior permite que apresentemos um limite assintótico para o número de Ramsey multipartido. Um resultado analógo para duas cores é demonstrado por Burger e van Vuuren [4].

Teorema 5 *Para $n \geq 2$ e $p, k \geq 1$ arbitrários,*

$$\lim_{s\to\infty} m_s(K_{n\times p}; k) = 1.$$

Prova: Seja $n_0 = r(n; k)$. A Proposição 4 e o Teorema 1 afirmam que a sequência

$$\{m_s(K_{n\times p}; k)\}_{s=n_0}^{\infty}$$

é não-crescente. Como $m_s(K_{n\times p}; k)$ é um número positivo para $s \geq n_0$, precisamos mostrar que $m_q(K_{n\times p}; k) = 1$ para algum número natural q.

Consideremos $q = r(np; k)$. O grafo $K_{q\times 1}$ é isomorfo a K_q. Por construção de q, toda k-coloração de $K_{q\times 1}$ contém cópia monocromática de K_{np}. Mas, $K_{n\times p} \subseteq K_{np}$ e portanto, $m_q(K_{n\times p}; k) = 1$. ∎

O resultado a seguir fornece um limitante inferior, cuja demonstração é bastante simples, sendo este então um limitante inferior trivial. Este limitante possui versão para duas cores devido a Burger e van Vuuren [4].

Proposição 6 *Sejam números naturais $s, p \geq 1$ e $n, k \geq 2$. Sob estas hipóteses,*

$$m_s(K_{n\times p}; k) \geq \left\lceil \frac{np}{s} \right\rceil.$$

Prova: O grafo $K_{n\times p}$ possui np vértices. Dessa forma, devem existir pelo menos $\lceil np/s \rceil$ vértices por classe de um grafo multipartido completo balanceado composto por s classes a fim de garantir algum $K_{n\times p}$ como subgrafo. ∎

4 Limitante inferior via método probabilístico

Em 1947 Erdős, por meio de argumentos probabilísticos, garantiu a existência de um K_t monocromático em qualquer bicoloração do grafo completo com $2^{t/2}$ vértices. Este método, atualmente conhecido por Método Probabilístico, é uma poderosa ferramenta utilizada para solucionar diversos problemas em matemática discreta. Por meio desta ferramenta, Burger e van Vuuren obtiveram um limitante inferior geral. Inspirados em tal resultado, no caso de k-colorações de um grafo multipartido apresentamos um limitante inferior geral. Este método não é construtivo, afirma a existência de um grafo multipartido "grande" desprovido de cópias monocromáticas de $K_{n\times p}$.

Teorema 7 *Sejam números naturais* $s, p \geq 1$ *e* $n, k \geq 2$,

$$m_s(K_{n\times p}; k) > \frac{1}{j}\left(n!(p!)^n k^{p^2\binom{n}{2}-1}\right)^{\frac{1}{np}}$$

5 Limitante superior via PCP

O Princípio da Casa dos Pombos nos diz que: "Colocados $2s-1$ pombos em duas casas, então a primeira tem pelo menos s pombos ou a segunda tem pelo menos s pombos". Reformulando esse enunciado, obtemos um enunciado equivalente usando a linguagem das colorações: "Para qualquer 2-coloração de $\{1,\ldots,2s-1\}$ existe um subconjunto monocromático com s elementos na primeira cor ou um subconjunto monocromático com s elementos na segunda cor". O PCP é o caso mais simples das partições do tipo Ramsey.

Neste ambiente, o PCP continua a ser uma ferramenta fundamental na demonstração de um limitante superior. Por meio do PCP generalizado, obtemos o seguinte limitante.

Teorema 8 *Sejam números naturais* $n \geq 1$ *e* $j, k \geq 2$, *então*

$$m_j(K_{2\times n}; k) \leq \max\left\{k(n-1)+1, \left\lceil \frac{k(n-1)\binom{k(n-1)+1}{n}+1}{j-1} \right\rceil\right\}.$$

Os resultados anteriores estabelecem limitantes para o número de Ramsey multipartido. Por exemplo, pela Proposição 6, $m_4(K_{2\times 3}; 3) \geq 2$ e o pelo Teorema 7, $m_4(K_{2\times 3}; 3) \geq 3$. O teorema anterior garante que $m_4(K_{2\times 3}; 3) \leq 70$. Notemos que os resultados não fornecem limitantes "justos"para o número $m_4(K_{2\times 3}; 3)$. Assim como na Teoria Clássica de Ramsey, aqui em grafos multipartidos a obtenção de valores exatos mostra-se bastante complexa.

Referências

[1] Beineke, L. W. e Wilson, R. J.,*Selected topics in graph theory*,Academic Press, 1978.

[2] Bollobás, B.,*Extremal Graph Theory*, New York: Academic Press, 1978.

[3] Bollobás, B.,*Modern Graph Theory*, Springer, 1998.

[4] Burger, A. P. e van Vuuren, J. H., *Ramsey numbers in complete balanced multipartite graphs. Part II: Size numbers*, Discrete Math. 283 (2004) 45-49.

[5] Day, D., Goddard, W., Henning, M. e Swart, H.,*Multipartite Ramsey numbers*, Ars Combinatoria, 58 (2001) 23-31.

[6] Diestel, R.,*Graph Theory*, Springer-Verlag, 1997.

[7] Graham, R. L., Rothschild, B. L. e Spencer J. H.,*Ramsey Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1990.

[8] Hattingh, J. H. e Henning, M. A.,*Bipartite Ramsey Theory*, Utilitas Mathematica 53 (1998) 217-230.

[9] Jukna, S.,*Extremal combinatorics: with applications in computer science*, Springer, 2001.

[10] Netto Boaventura, P. O.,*Grafos: teoria, modelos, algoritmos*, Edgard Blücher, São Paulo, 2003.

[11] Radziszowski, S.P., *Small Ramsey numbers*, The Electronic J. Combin., dynamical survey DS1.13, (2013).

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0234