

O Método de Crank–Nicolson Galerkin Linearizado para uma Equação Não Linear do Tipo Benjamin-Bona-Mahony com Fronteira Móvel

Vania C. Machado¹

DTL/UFRRJ, Nova Iguaçu, RJ

Bruno A. Carmo², Mauro A. Rincon³

PPGI/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Apresentamos um estudo da simulação numérica para as soluções aproximadas de um problema não linear associado a uma equação do tipo Benjamin-Bona-Mahony (BBM), definida em um domínio não cilíndrico. A solução aproximada é obtida através do Método de Crank-Nicolson Galerkin linearizado, aplicado a um problema equivalente definido em um domínio cilíndrico. Este domínio é obtido por meio de um difeomorfismo que transforma o problema original, definido em um domínio não cilíndrico, em um problema equivalente no cilindro. O esquema utilizado se destaca por recair, em cada passo de tempo, em um sistema algébrico linear, isso mantendo a ordem de convergência quadrática no tempo, característica do Método de Crank-Nicolson. Ilustramos a convergência do erro, tanto no tempo como no espaço, nos casos uni e bidimensionais, usando os polinômios de Hermite cúbicos como base para o espaço aproximado. Os resultados apresentados confirmam a consistência entre resultados teóricos e numéricos, validando a precisão, estabilidade e aplicabilidade da implementação do método numérico proposto.

Palavras-chave. BBM, Domínio Não Cilíndrico, Crank-Nicolson Galerkin Linearizado, Simulação

1 Introdução

Neste trabalho, realizamos a simulação numérica de um problema não linear em um domínio não cilíndrico relacionado a uma equação do tipo BBM. O modelo abordado é dado por

$$\begin{cases} u'(x, t) - \Delta u'(x, t) + \operatorname{div}_x \phi(u(x, t)) = 0 & \text{em } \widehat{Q}, \\ u(x, t) = 0 & \text{em } \widehat{\Sigma}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega_0, \end{cases} \quad (1)$$

em que, $\widehat{Q} = \bigcup_{0 \leq t < T} \Omega_t \times \{t\}$, $\widehat{\Sigma} = \bigcup_{0 \leq t < T} \Gamma_t \times \{t\}$, sendo Γ_t a fronteira de $\Omega_t \subset \mathbb{R}^d$, e $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

A equação BBM, introduzida por Benjamin, Bona e Mahony em [1], é uma extensão da equação de Korteweg-de Vries (KdV), que descreve ondas longas de pequena amplitude propagando-se em uma única direção. O modelo (1) é um caso particular do problema tratado em [2], onde os autores demonstram a existência e unicidade de solução para uma generalização da BBM em domínio não cilíndrico.

¹machadovc@ufrj.br

²bruno.carmo@ppgi.ufrj.br

³rincon@ic.ufrj.br

Dada a dificuldade de obter soluções exatas para equações diferenciais, métodos numéricos são utilizados para gerar soluções aproximadas. Na literatura encontramos diversos trabalhos sobre estimativas de erros para soluções aproximadas de diversas variantes da BBM em domínios cilíndricos [6]. No entanto, o mesmo não ocorreu para domínios não cilíndricos.

Identificamos apenas um estudo sobre solução aproximada para equações do tipo BBM em domínios não cilíndricos [4]. Nele, os autores utilizam o método de Crank-Nicolson Galerkin, mas com uma perda na ordem de convergência no tempo devido à linearização do termo não linear. O trabalho aborda a simulação numérica para a equação $u' - u'_{xx} + u_x + uu_x = 0$ em um domínio não cilíndrico unidimensional, com condição de fronteira Dirichlet homogênea. Até onde temos conhecimento, o trabalho pioneiro em estimativas de erro para o modelo (1) foi realizado por Machado em [3]. Neste trabalho, foi abordado o problema semi-discreto e o totalmente discreto, utilizando o método de Galerkin e Crank-Nicolson Galerkin linearizado, respectivamente.

No presente trabalho, abordamos a solução numérica do problema totalmente discreto, definido via o Método de Crank-Nicolson Galerkin linearizado, para os casos uni e bidimensionais, utilizando os polinômios de Hermite cúbicos como base para os espaços de elementos finitos. Para avaliar a implementação, comparamos nossos resultados com os resultados teóricos de estimativa de erros estabelecidos por Machado em [3]. Além disso, realizamos investigações numéricas adicionais. Inicialmente, examinamos o impacto de uma fronteira que não satisfaz uma das hipóteses necessárias. Em seguida, ilustramos a razão por trás da ordem de convergência observada no espaço. Essas análises enriquecem nossa compreensão sobre a solução aproximada adotada.

O restante do trabalho está estruturado da seguinte maneira: na Seção 2, é apresentado o teorema que assegura a existência e unicidade de solução do modelo em estudo. Na Seção 3, é definido o problema totalmente discreto e na 4, essa aproximação é ilustrada para os casos uni e bidimensionais. Já na Seção 5, são apresentadas as investigações adicionais sobre a condição de fronteira e a ordem de convergência no espaço. Por fim, na Seção 6, são tratadas as considerações finais.

2 Existência e Unicidade

Os Teoremas de Existência e Unicidade de solução fraca para o problema (1) foram estabelecidos em [2] utilizando os métodos de Faedo-Galerkin e da energia. A estratégia adotada pelos autores consiste em realizar uma mudança de variável que transforma o problema original em um problema equivalente, definido em um domínio cilíndrico. Essa transformação é realizada por meio de um difeomorfismo $\tau_k : \widehat{Q} \rightarrow Q$ tal que, $(x, t) \mapsto (y, t) = \left(\frac{x}{k(t)}, t\right)$ em que, $Q = \Omega \times [0, T[$ representa o domínio cilíndrico, $\sum = \Gamma \times [0, T[$ a fronteira lateral de Q e Γ a fronteira de Ω . Utilizando o difeomorfismo e observando que $x(t) = k(t)y$, os autores definem a função $v : Q \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$v(y, t) = (u \circ \tau_k^{-1})(y, t) = u(x, t),$$

o que permite a aplicação de resultados de compacidade e do método de Galerkin. Após a mudança de variável, o problema transformado é definido no cilindro $Q = \Omega \times [0, T[$ e expresso por

$$\begin{cases} v'(y, t) - \frac{1}{k^2(t)} \Delta v'(y, t) + \frac{k'(t)}{k^3(t)} \sum_{j=1}^d y_j \Delta \frac{\partial v(y, t)}{\partial y_j} + \frac{2k'(t)}{k^3(t)} \Delta v(y, t) \\ - \frac{k'(t)}{k(t)} y \cdot \nabla v(y, t) + \frac{1}{k(t)} \operatorname{div}_y \phi(v(y, t)) = 0, & (y, t) \in Q, \\ v(y, t) = 0, & (y, t) \in \sum, \\ v(y, 0) = v_0(y), & y \in \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Como os problemas (1) e (2) são equivalentes, a existência e unicidade de solução no domínio cilíndrico assegura as mesmas propriedades para o problema original, definido no domínio não cilíndrico. Esses resultados são obtidos sob as seguintes hipóteses:

- (H1) k é uma função real continuamente derivável em $[0, T]$, com $k'(t) < 0$ e $0 < k_0 \leq k(t) \leq k_1$;
 (H2) Γ é de classe C^2 e $y \cdot \nu \geq 0$, $\forall y \in \Gamma$, onde ν é a normal exterior unitária a Γ em y ;
 (H3) $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ com $\phi(s) = (\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_d(s))$, $\phi(0) = 0$ e $|\phi'_i(s)| \leq C_i(1 + |s|^{\sigma_i})$ para $i = 1, 2, \dots, d$, onde, para cada i , $C_i \geq 0$, $0 \leq \sigma_i$, se $d \leq 2$, e $0 \leq \sigma_i \leq \frac{2}{d-2}$, se $d > 2$.

Sob essas condições, os autores em [2] garantem o sentido da igualdade e a regularidade da solução.

Teorema 2.1. (Solução Fraca) Se $v_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e satisfaz as hipóteses (H1)-(H3), então o problema de valor inicial (2) possui uma única solução $v : Q \rightarrow \mathbb{R}$ na classe

$$v \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad v' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3)$$

satisfazendo a identidade integral

$$\begin{aligned} \int_Q v' w \, dy \, dt + \int_Q \frac{1}{k^2} \nabla v' \cdot \nabla w \, dy \, dt - \sum_{j=1}^d \int_Q \frac{k'}{k^3} \nabla \frac{\partial v}{\partial y_j} \cdot \nabla (y_j w) \, dy \, dt - \int_Q \frac{2k'}{k^3} \nabla v \cdot \nabla w \, dy \, dt \\ - \int_Q \frac{k'}{k} y \cdot \nabla v w \, dy \, dt + \int_Q \frac{1}{k} \operatorname{div}_y \phi(v) w \, dy \, dt = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

para todo $w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e $T > 0$. Além disso, v verifica a condição inicial $v(y, 0) = v_0(y)$.

3 Problema Totalmente Discreto

Seguindo [5], dado $r \in \mathbb{N}$ fixo, $r \geq 3$, seja $\{S_h^r(\Omega)\}_{0 < h < 1}$ uma família de subespaços de dimensão finita de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ satisfazendo a seguinte propriedade de aproximação:

$$\inf_{\chi \in S_h^r(\Omega)} \{\|v - \chi\| + h\|v - \chi\|_1 + h^2\|v - \chi\|_2\} \leq ch^s \|v\|_s, \text{ se } v \in H_0^1(\Omega) \cap H^s(\Omega), \text{ com } 3 \leq s \leq r,$$

sendo c uma constante independente de h e v e $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_s$ as normas de $L^2(\Omega)$ e $H^s(\Omega)$.

Para estabelecer o esquema totalmente discreto, consideramos $\{t_n; t_n = n\tau; 0 \leq n \leq N\}$ uma discretização uniforme no intervalo $[0, T]$, com τ o passo de tempo, N a parte inteira de T/τ e $t_{n-1/2} = (t_n + t_{n-1})/2$ o ponto médio do n -ésimo intervalo. Ademais, dada uma função ω definida sobre a discretização, com $\omega^n = \omega(t_n)$ e $\omega^{1,0}$ uma solução preditora para $\omega(t_1)$, adotamos:

$$\begin{aligned} \omega^{*n} = \omega^0, \text{ se } n = "1, 0", \quad \omega^{*n} = \omega^{1,0}, \text{ se } n = 1, \quad \omega^{*n} = \tilde{\omega}^n, \text{ se } n \geq 2, \quad \bar{\partial}\omega^{1,0} = (\omega^{1,0} - \omega^0)/\tau, \\ \hat{\omega}^{1,0} = (\omega^{1,0} + \omega^0)/2, \quad \bar{\partial}\omega^n = (\omega^n - \omega^{n-1})/\tau, \quad \hat{\omega}^n = (\omega^n + \omega^{n-1})/2, \quad \tilde{\omega}^n = (3\omega^{n-1} - \omega^{n-2})/2. \end{aligned}$$

A solução aproximada no tempo t_1 é obtida por meio de um método preditor-corretor de passo único. A notação $n = "1, 0"$ em (5) indica a etapa preditora, cuja solução aproximada é denotada por $V^{1,0}$. Em seguida, considerando $n = 1$, obtém-se a solução corretora, V^1 . Nesse contexto, dado $V^0 \in S_h^r(\Omega)$, o esquema totalmente discreto definido via o Método de Cranck-Nicolson Galerkin linearizado consiste em determinar V^n em $S_h^r(\Omega)$, tal que, $\forall \chi \in S_h^r(\Omega)$,

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}V^n, \chi) + \frac{1}{k^2(t_{n-\frac{1}{2}})} (\nabla \bar{\partial}V^n, \nabla \chi) - \frac{k'(t_{n-\frac{1}{2}})}{k^3(t_{n-\frac{1}{2}})} \sum_{j=1}^d \left(\nabla \frac{\partial \hat{V}^n}{\partial y_j}, \nabla (y_j \chi) \right) - \frac{2k'(t_{n-\frac{1}{2}})}{k^3(t_{n-\frac{1}{2}})} (\nabla \hat{V}^n, \nabla \chi) \\ - \frac{k'(t_{n-\frac{1}{2}})}{k(t_{n-\frac{1}{2}})} (y \cdot \nabla \hat{V}^n, \chi) + \frac{1}{k(t_{n-\frac{1}{2}})} (\nabla \cdot \phi(V^{*n}), \chi) = 0, \quad \text{para } n = "1, 0", 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

A existência e unicidade de solução do problema (5), segue do fato deste ser equivalente a um sistema linear do tipo $Ay = b$, com A inversível. Os resultados da estimativa de erro associada à solução do problema totalmente discreto foram realizados por Machado em [3], e dado por

$$E := E(h, \tau) = \max_{0 \leq n \leq N} \|\nabla(V^n - v(t_n))\| \leq C(h^{s-2} + \tau^2). \quad (6)$$

No caso dos polinômios de Hermite cúbico, tal estimativa estabelece que: $E(h, \tau) \leq C(h^2 + \tau^2)$.

4 Simulação Numérica

Nesta seção, apresentamos a solução do problema totalmente discreto, definido em (5), para os casos uni e bidimensionais e espaço aproximado $S_h^r(\Omega)$ definido a partir dos polinômios de Hermite cúbico. Toda a implementação foi realizada no software MATLAB. As fronteiras adotadas na simulação satisfazem às hipóteses exigidas em (H1), sendo escolhidas como:

Front. 1: $\Omega =]-1, 1[$, caso 1D, $\Omega =]-1, 1[\times]-1, 1[$, caso 2D, e $k(t) = \frac{2t+1}{4t+1}$.

Front. 2: $\Omega =]-1, 1[$, caso 1D, $\Omega =]-1, 1[\times]-1, 1[$, caso 2D, e $k(t) = \frac{t+1}{4t+1}$.

Front. 3: $\Omega =]-1, 1[$, caso 1D, $\Omega =]-1, 1[\times]-1, 1[$, caso 2D, e $k(t) = \frac{t+1}{10t+1}$.

Os resultados são exibidos da seguinte maneira: para cada um dos casos, unidimensional e bidimensional, consideramos inicialmente a versão não homogênea de (2) para validar o esquema. Após a validação da implementação, retornamos ao modelo original e apresentamos a solução aproximada. Definimos a fonte g da versão não homogênea e a solução inicial v_0 a partir da escolha de v , aqui dadas por, $v(y, t) = -\sin(\pi y)e^t$, no caso 1D e $v(y_1, y_2, t) = -\sin(\pi y_1)\sin(\pi y_2)e^t$ no caso 2D. Além disso, a menos que explicitamente indicado o contrário, consideramos

$$V^0 = P_h v_0, \quad T = 1, \quad \phi(s) = s + \frac{s^2}{2} \text{ no caso 1D e } \phi(s) = (s + \frac{s^2}{2}, s + \frac{s^2}{2}) \text{ no caso 2D,}$$

em que, o operador projeção elíptica é definido por

$$\begin{aligned} P_h : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow S_h^r(\Omega) \\ v &\longmapsto P_h v, \quad \text{tal que } (\nabla P_h v - \nabla v, \nabla \chi) = 0, \quad \forall \chi \in S_h^r(\Omega). \end{aligned}$$

Caso Unidimensional. Na Figura 1 exibimos o erro $E(h, \tau)$ em função de τ e h para as fronteiras 1, 2 e 3. Em ambos os casos, observamos que a ordem de convergência é aproximadamente 2, e portanto, está de acordo com (6). Na Figura 2, temos as soluções numéricas U^n para cada passo de tempo da discretização temporal de $[0, T]$. Utilizamos $h = 2^{-3}$, $\tau = 2^{-5}$ e, da esquerda para a direita, consideramos as fronteiras 1, 2 e 3.

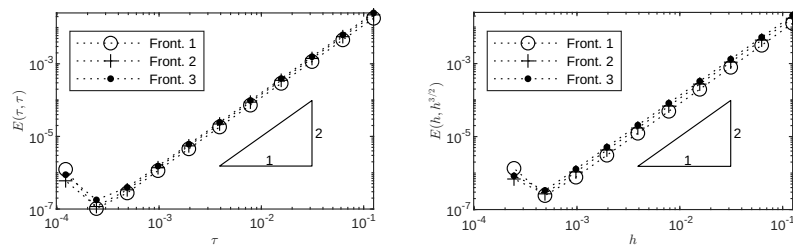


Figura 1: Problema não homogêneo 1D. Convergência do erro no tempo e espaço. Fonte: dos autores.

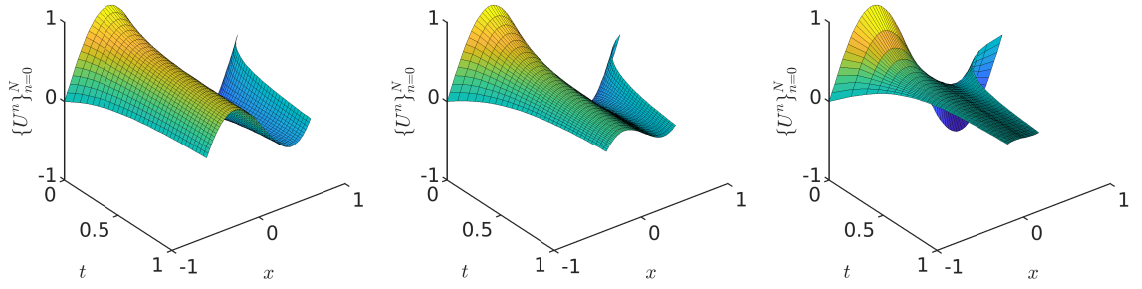


Figura 2: Problema homogêneo 1D. $\{U^n\}_{n=0}^N$, com $h = 2^{-3}$, $\tau = 2^{-5}$ e front. 1, 2 e 3. Fonte: dos autores.

Caso Bidimensional. A Figura 3 mostra o estudo do erro no tempo e no espaço. Assim como no caso unidimensional, os resultados estão de acordo com o estudo teórico. Na Figura 4, apresentamos a solução numérica U^n nos tempos t_0 , $t_{\frac{N}{2}}$ e t_N , com $N = 64$, referente à fronteira 1.

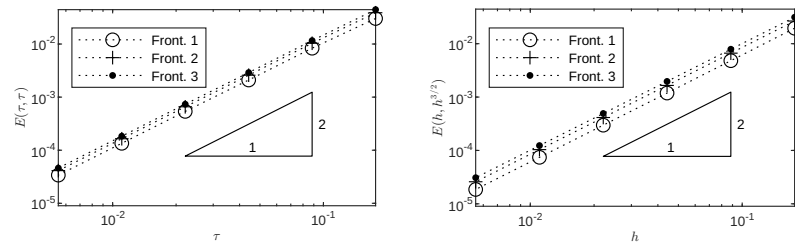


Figura 3: Problema não homogêneo 2D. Convergência do erro no tempo e espaço. Fonte: dos autores.

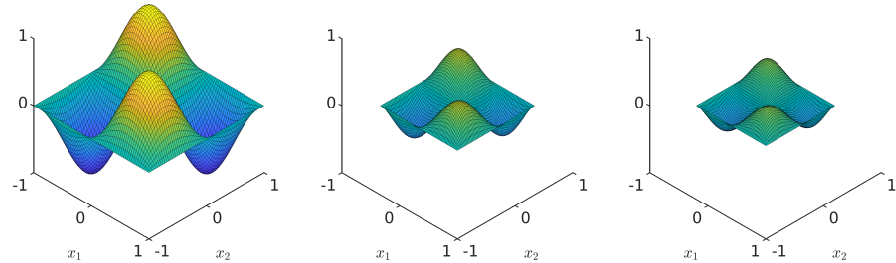


Figura 4: Problema homogêneo 2D. Solução Numérica U^0 (à esquerda), $U^{\frac{N}{2}}$ (centro) e U^N (à direita), com $N = 64$, $\tau = 1/64$, $h = 2^{-\frac{7}{2}}$ e fronteira 1. Fonte: dos autores.

5 Investigações Adicionais

Necessidade da Hipótese $k'(t) < 0$

Essa hipótese é essencial tanto para a existência e unicidade da solução do modelo quanto para a obtenção das estimativas de erro das soluções aproximadas, conforme observado em [3]. Assim sendo, surge um questionamento natural, o que acontece quando essa condição não é satisfeita?

A Fronteira 4, definida a seguir, tem como propósito investigar numericamente a relevância do sinal de k' na estimativa de erro dada em (6). Para $T \in]0, \frac{4}{10}[$, k satisfaz as hipóteses em (H1). Contudo, para $T \in [\frac{4}{10}, 1]$, a condição $k'(t) < 0$ nem sempre é satisfeita.

Front. 4: $\Omega =]-1, 1[$ no $1D$, $\Omega =]-1, 1[\times]-1, 1[$ no $2D$ e $k(t) = 1 + \frac{1}{8}(\cos(2\pi(t+0,1)) - 1)$.

As Tabelas 1 e 2 apresentam o estudo do erro espacial considerando a fronteira 4 para diferentes valores de T . Como pode ser visto nos resultados apresentados, a condição imposta sobre $k'(t)$ é de fato relevante. Isso é ilustrado no exemplo em questão, uma vez que o erro não se comportou da mesma forma que nas fronteiras 1, 2 e 3 para os casos em que T é maior do que 0,4.

Tabela 1: Problema não homogêneo $1D$. Estudo do erro no espaço, $E(h, \tau)$ com $\tau = h^{\frac{3}{2}}$, para a front. 4.

	T=0,3			T=0,5			T=0,8			T=1		
h	Erro	Taxa		Erro	Taxa		Erro	Taxa		Erro	Taxa	
2^{-03}	$5,91e-3$	—		$7,28e-3$	—		$8,50e-2$	—		$1,23e-1$	—	
2^{-04}	$1,60e-3$	1,8778		$1,81e-3$	2,0067		$7,44e-2$	0,1927		$1,10e-1$	0,1614	
2^{-05}	$4,03e-4$	1,9954		$4,53e-4$	2,0008		$7,11e-2$	0,0656		$1,07e-1$	0,0371	
2^{-06}	$1,01e-4$	1,9983		$1,13e-4$	2,0002		$7,24e-2$	-0,0271		$1,07e-1$	0,0093	
2^{-07}	$2,53e-5$	1,9972		$2,83e-5$	2,0001		$7,28e-2$	-0,0064		$1,06e-1$	0,0022	
2^{-08}	$6,32e-6$	1,9996		$7,07e-6$	2,0000		$7,28e-2$	-0,0012		$1,06e-1$	0,0005	
2^{-09}	$1,58e-6$	1,9995		$3,54e-6$	0,9984		$7,29e-2$	-0,0018		$1,06e-1$	0,0001	
2^{-10}	$3,95e-7$	1,9999		$3,21e-6$	0,1407		$7,29e-2$	0,0000		$1,06e-1$	0,0000	
2^{-11}	$9,91e-8$	1,9960		$3,17e-6$	0,0161		$7,29e-2$	0,0000		$1,06e-1$	0,0000	
2^{-12}	$3,40e-7$	-1,7781		$3,19e-6$	-0,0078		$7,25e-2$	0,0091		$1,06e-1$	0,0100	

Tabela 2: Problema não homogêneo $2D$. Estudo do erro no espaço, $E(h, \tau)$ com $\tau = h^{\frac{3}{2}}$, para a front. 4.

	T=0,3			T=0,5			T=0,8			T=1		
h	Erro	Taxa		Erro	Taxa		Erro	Taxa		Erro	Taxa	
$2^{-\frac{5}{2}}$	$9,65e-3$	—		$1,08e-2$	—		$6,46e-2$	—		$1,46e-1$	—	
$2^{-\frac{7}{2}}$	$2,34e-3$	2,0440		$2,70e-3$	2,0067		$8,25e-2$	-0,3517		$1,28e-1$	0,1883	
$2^{-\frac{9}{2}}$	$5,96e-4$	1,9731		$6,73e-4$	2,0037		$8,65e-2$	-0,0673		$1,25e-1$	0,0403	
$2^{-\frac{11}{2}}$	$1,49e-4$	1,9950		$1,68e-4$	2,0008		$8,52e-2$	0,0209		$1,24e-1$	0,0097	
$2^{-\frac{13}{2}}$	$3,74e-5$	1,9976		$4,20e-5$	2,0001		$8,56e-2$	-0,0059		$1,24e-1$	0,0023	
$2^{-\frac{15}{2}}$	$9,36e-6$	1,9996		$1,05e-5$	2,0000		$8,61e-2$	-0,0084		$1,24e-1$	0,0005	

Perda da Ordem de Convergência no Espaço

O objetivo desta subseção é investigar a perda da ordem de convergência no espaço na estimativa de erro do problema totalmente discreto. Destacamos que, para uma variedade de problemas parabólicos, veja [5] e suas referências, a convergência ótima na norma de $H_0^1(\Omega)$ é $\mathcal{O}(h^{s-1})$. No entanto, a estimativa (6) obtida em [3] apresenta ordem de convergência $\mathcal{O}(h^{s-2})$ no espaço. No caso de Hermite cúbico como base do espaço aproximado, as ordens $\mathcal{O}(h^{s-1})$ e $\mathcal{O}(h^{s-2})$ se traduzem em $\mathcal{O}(h^3)$ e $\mathcal{O}(h^2)$, respectivamente. Mostraremos que essa perda de convergência se deve à presença do termo $\sum_{j=1}^d y_j \Delta(\frac{\partial v(y,t)}{\partial y_j})$ em (2).

Para ilustrar numericamente a perda de convergência, implementamos o problema sem o termo mencionado e exibimos os resultados de erro no espaço para casos uni e bidimensionais. A Figura 5 confirma uma ordem de convergência $\mathcal{O}(h^3)$ no espaço para o modelo simplificado, enquanto o problema original tem uma ordem de convergência de $\mathcal{O}(h^2)$. Esses resultados destacam que a perda de ordem de convergência é devida ao termo removido do modelo.

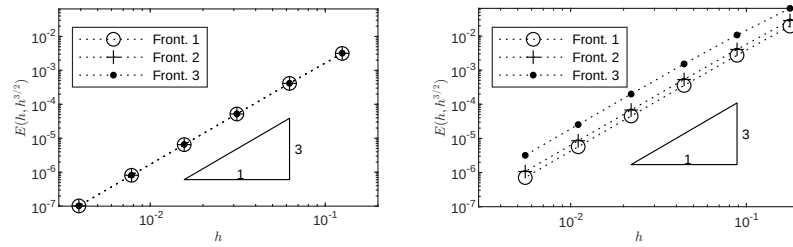


Figura 5: Problema simplificado não homogêneo. Convergência do erro (1D e 2D). Fonte: dos autores.

6 Considerações Finais

Neste estudo, realizamos simulações numéricas de uma equação do tipo BBM com fronteira móvel. A BBM é uma evolução da equação de Korteweg-de Vries, que modela ondas de pequena amplitude que se propagam em uma única direção. Ao abordar a BBM em um domínio não cilíndrico, buscamos fornecer um estudo mais realístico e abrangente do modelo.

Implementamos o esquema totalmente discreto nos casos uni e bidimensional, com polinômios de Hermite cúbicos como base para o espaço aproximado. Ilustramos os resultados de estimativa de erro no tempo e espaço e constatamos que estes foram consistentes com o estudo teórico. Por fim, investigamos numericamente dois aspectos relacionados à solução aproximada do modelo em estudo. Primeiro, confirmamos a relevância da condição $k'(t) < 0$. Segundo, mostramos que a perda da ordem de convergência no espaço está relacionada a uma parcela específica do modelo.

Agradecimentos

O autor Mauro A. Rincon foi apoiado parcialmente pelo CNPQ-Brasil e FAPERJ-Brasil. O autor Bruno A. Carmo foi apoiado por uma bolsa pós-doc CAPES (N. 23038.006308/2021-70).

Referências

- [1] T. B. Benjamin, J. L. Bona e J. J. Mahony. “Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems”. Em: **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences** 272.1220 (1972), pp. 47–78.
- [2] J. Límaco, H. Clark e L. A. Medeiros. “On Equations of Benjamin–Bona–Mahony type”. Em: **Nonlinear Analysis** 59.8 (2004), pp. 1243–1265. DOI: 10.1016/j.na.2004.08.013.
- [3] V. C. Machado. “Análise Numérica de uma Equação do tipo Benjamin-Bona-Mahony com fronteira móvel”. Tese de doutorado. PPGI/UFRJ, 2024.
- [4] M. A. Rincon, J. Límaco e R. Vale. “Analysis and numerical solution of Benjamin–Bona–Mahony equation with moving boundary”. Em: **Applied Mathematics and Computation** 216.1 (2010), pp. 138–148. DOI: 10.1016/j.amc.2010.01.023.
- [5] M. F. Wheeler. “A Priori L^2 Error Estimates for Galerkin Approximations to Parabolic Partial Differential Equations”. Em: **SIAM Journal on Numerical Analysis** 10.4 (1973), pp. 723–759. DOI: 10.1137/0710062.
- [6] H. Yang. “Convergence and superconvergence analysis of energy preserving Crank–Nicolson Galerkin method for the Benjamin–Bona–Mahony equation”. Em: **International Journal of Computer Mathematics** 100.6 (2023), pp. 1212–1227.