

Atividades Dinâmicas no GeoGebra para Comprovar Teoremas Geométricos Clássicos

Rudimar L. Nós¹ Mari Sano²

Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Curitiba, PR

Victoria M. R. da Silva³

Colégio Estadual Unidade Polo, São José dos Pinhais, PR

Resumo. Apresentamos neste trabalho atividades para investigar dinamicamente os teoremas de Pitágoras e de Napoleão e o ponto de Fermat. As atividades foram construídas em páginas da plataforma GeoGebra, as quais podem ser acessadas por links externos e utilizadas pelo professor de matemática da Educação Básica e do Ensino Superior. Concluímos que o emprego do GeoGebra dinamiza demonstrações geométricas e que as atividades propostas estão em consonância com o que estabelece a Base Nacional Comum Curricular sobre o uso de tecnologias digitais no ensino de matemática.

Palavras-chave. Teorema de Pitágoras, Teorema de Napoleão, Ponto de Fermat, Tecnologias Digitais.

1 Introdução

Em matemática, “uma demonstração é uma entidade objetivamente existente no espaço lógico [...] é algo capaz de induzir a uma vivência subjetiva indutora de convicção em um agente matemático real” ([16], p. 69). Com o advento do computador e o emprego deste para auxiliar no desenvolvimento de demonstrações, surgem os ambientes de geometria dinâmica, dentre os quais destacamos o GeoGebra [4]. Como a leitura de uma demonstração “exige que se desloque, frequentemente, o olhar para as representações visual, linguística e simbólica” ([9], p. 12), as tecnologias digitais permitem “tornar manipuláveis as representações semióticas como se fossem objetos concretos” ([9], p. 5). Logo, “entende-se que as demonstrações feitas em ambientes estáticos (papel ou quadro) podem dificultar a percepção das variações dos registros, porque tais ambientes não permitem variações concomitantes” ([9], p. 14).

Quanto à demonstração em matemática, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC [2] destaca que: “Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática” ([2], p. 265). Ainda, a quinta competência específica de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio da BNCC associa o emprego de tecnologias à demonstração em matemática: “Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas” ([2], p. 531).

¹rudimarnos@utfpr.edu.br

²marisano@utfpr.edu.br

³victoriamazotti@gmail.com

Desta forma, e devido também às nossas experiências com o GeoGebra [5, 11–15, 18, 19], apresentamos neste trabalho atividades dinâmicas para comprovar três teoremas geométricos clássicos [17]: o teorema de Pitágoras, o teorema de Napoleão e o ponto de Fermat. As experiências dinâmicas, elaboradas de modo a fornecer recursos didáticos para auxiliar o professor de matemática na abordagem desses teoremas, foram construídas em páginas do GeoGebra que podem ser acessadas por links externos, apresentados no texto, e manipuladas via App.

2 O Teorema de Pitágoras

Para o Teorema 2.1, Loomis [7] organizou 256 demonstrações geométricas. Estas foram divididas em dez grupos, cada um deles com um método de demonstração. As demonstrações geométricas de números 9 a 32 consistem na divisão dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo em partes congruentes. Nesse grupo, selecionamos a demonstração 9, que corresponde à equicomposição de Henry Perigal (1801-1898) [10], ilustrada na Figura 1.

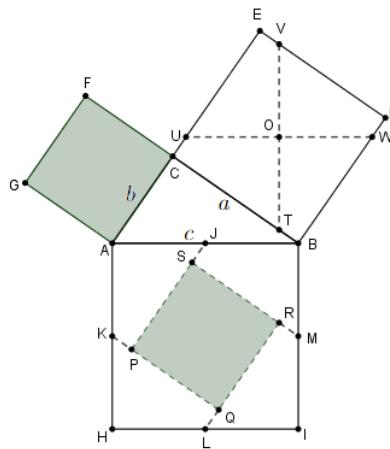


Figura 1: Demonstração geométrica número 9 de Loomis: a equicomposição de Perigal. Fonte: Silva [17].

Teorema 2.1 (de Pitágoras). *Se ABC é um triângulo retângulo em C , então o quadrado da medida da hipotenusa AB é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos AC e BC .*

Demonstração. Sejam: o triângulo ABC , retângulo em \widehat{C} e de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$; os quadrados $ACFG$, $CBDE$ e $ABIH$ construídos, respectivamente, sobre os lados AC , BC e AB do triângulo ABC ; os pontos J , K , L e M , pontos médios dos lados AB , HA , IH e BI , respectivamente, do quadrado $ABIH$; os pontos P , Q , R e S interiores ao quadrado $ABIH$, com $JP \parallel RL \parallel AC$ e $SM \parallel KQ \parallel BC$, onde $S \in JP$, $Q \in RL$, $R \in SM$ e $P \in KQ$; o ponto O , centro do quadrado $CBDE$; os pontos T , U , V e W pertencentes, respectivamente, aos lados CB , EC , DE e BD do quadrado $CBDE$, tais que $UW \parallel AB$ e $VT \perp UW$ - Figura 1.

Desta forma, temos que o quadrado $PQRS$ é congruente ao quadrado $ACFG$, $VT \parallel BI$, $VO \equiv OT \equiv BM$ e $AU \equiv BW \equiv JP \equiv SM \equiv RL \equiv KQ \equiv DV \equiv EU \equiv CT$. Ainda, como $UW \parallel AB$ e $AJ \equiv JB \equiv UO \equiv OW \equiv AK$, os quadriláteros $HLQK$, $IMRL$, $BJSM$, $AKPJ$, $UCTO$, $TBWO$, $WDVO$ e $VEUO$ são congruentes. Logo, temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(ABIH) &= \mathcal{A}(PQRS) + 4\mathcal{A}(AKPJ); \\ \mathcal{A}(ABIH) &= \mathcal{A}(ACFG) + 4\mathcal{A}(VEUO); \\ \mathcal{A}(ABHI) &= \mathcal{A}(ACFG) + \mathcal{A}(CBDE).\end{aligned}\tag{1}$$

Como os lados dos quadrados $ABHI$, $ACFG$ e $CBDE$ medem, respectivamente, c , b e a , concluímos de (1) que $c^2 = a^2 + b^2$. \square

A demonstração da equicomposição de Perigal pode ser efetuada com mais detalhes, como em Fernandes [3]. Construímos no GeoGebra uma atividade dinâmica para a equicomposição de Perigal, disponível em <https://www.geogebra.org/m/vzjfw5vk>. No GeoGebra App, os vértices A , B e C podem ser movimentados dinamicamente para explorar diferentes configurações do triângulo retângulo e verificar a equivalência de áreas dos quadriláteros da equicomposição.

3 O Teorema de Napoleão

O Teorema 3.1 é atribuído a Napoleão Bonaparte (1769-1821), político, militar e imperador francês. Esse teorema estabelece que os centros dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo são os vértices de um triângulo equilátero. Uma propriedade adicional dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo inicial, também atribuída a Napoleão, é que as circunferências circunscritas concorrem no primeiro ponto de Fermat [20]. O teorema de Napoleão é um caso especial do teorema de Petr-Neumann-Douglas [6].

Teorema 3.1 (de Napoleão). *Se ACD , BCE e ABF são triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo ABC , então o triângulo GHI , cujos vértices são, respectivamente, os baricentros dos triângulos equiláteros, é equilátero.*

Demonstração. Sejam o triângulo ABC , os triângulos equiláteros ABF , ACD e BCE , construídos sobre os lados de ABC , e os pontos G , H e I , baricentros dos triângulos ACD , BCE e ABF , respectivamente - Figura 2(a).

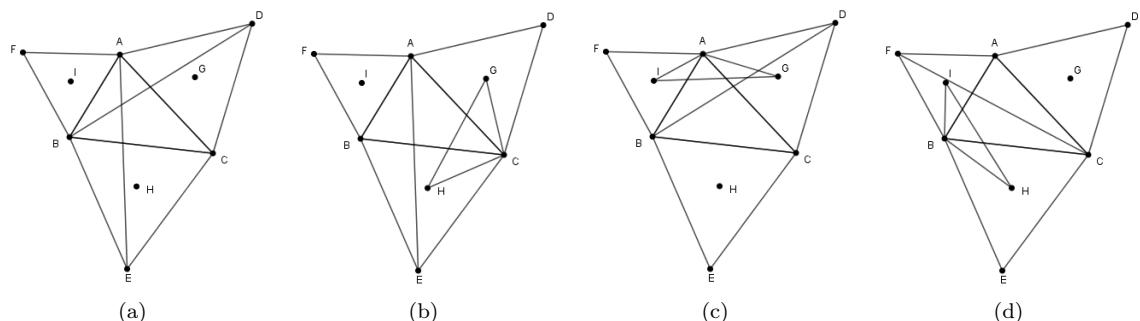


Figura 2: Triângulos para a prova do Teorema 3.1. Fonte: Silva [17].

Os triângulos ECA e BCD são congruentes pelo caso *LAL* (lado-ângulo-lado) [8], uma vez que $EC \equiv BC$, $DC \equiv AC$ e $\angle ECA \equiv \angle BCD$ - Figura 2(a). Logo, $BD \equiv AE$. Analogamente, temos que:

$$CF \equiv BD \equiv AE. \quad (2)$$

Empregando as propriedades do baricentro [8] nos triângulos equiláteros BCE e ACD - Figura 2(b), verificamos que $\angle HCB = 30^\circ$ e $\angle ACG = 30^\circ$. Logo:

$$\angle HCG \equiv \angle ECA; \quad (3)$$

$$HC = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot EC = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot EC; \quad (4)$$

$$CG = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot AC. \quad (5)$$

Das igualdades (4) e (5), obtemos que:

$$\frac{HC}{EC} = \frac{CG}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (6)$$

De (3) e (6), concluímos que os triângulos HCG e ECA são semelhantes (caso LAL). Portanto:

$$\frac{HC}{EC} = \frac{CG}{AC} = \frac{GH}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (7)$$

De forma análoga, temos nos triângulos BAD e IAG - Figura 2(c), que $\angle IAB = 30^\circ$ e $\angle CAG = 30^\circ$. Logo:

$$\angle IAG \equiv \angle BAD; \quad (8)$$

$$AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AD = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot AD; \quad (9)$$

$$AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BA = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot BA. \quad (10)$$

Das igualdades (9) e (10), constatamos que:

$$\frac{AG}{AD} = \frac{AI}{BA} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (11)$$

De (8) e (11), concluímos que os triângulos IAG e BAD são semelhantes (caso LAL). Desta maneira:

$$\frac{AG}{AD} = \frac{AI}{BA} = \frac{IG}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (12)$$

Analisando os triângulos IBH e FBC - Figura 2(d), temos que $\angle ABI = 30^\circ$ e $\angle CBH = 30^\circ$. Logo:

$$\angle IBH \equiv \angle CBF; \quad (13)$$

$$IB = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BF = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot BF; \quad (14)$$

$$BH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot BC. \quad (15)$$

Das igualdades (14) e (15), temos que:

$$\frac{IB}{BF} = \frac{BH}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (16)$$

Assim, concluímos de (13) e (16) que os triângulos IBH e FBC são semelhantes (caso LAL). Portanto:

$$\frac{IB}{BF} = \frac{BH}{BC} = \frac{IH}{FC} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (17)$$

Comparando as igualdades (7), (12) e (17), obtemos que:

$$\frac{IH}{FC} = \frac{IG}{BD} = \frac{GH}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (18)$$

Finalmente, de (2) e (18), concluímos que:

$$IH \equiv IG \equiv GH. \quad (19)$$

A relação (19) estabelece que os lados do triângulo GHI são congruentes. Portanto, o triângulo GHI é equilátero. \square

Organizamos no GeoGebra uma atividade dinâmica para o teorema de Napoleão, disponível em <https://www.geogebra.org/m/amhb8fng>. No GeoGebra App, os pontos A , B e C podem ser movimentados dinamicamente, o que permite observar novas configurações do triângulo ABC e verificar a medida dos lados do triângulo cujos extremos são os baricentros dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados de ABC .

4 O Ponto de Fermat

O primeiro ponto de Fermat (ou simplesmente ponto de Fermat ou ponto de Torricelli) é um problema proposto por Pierre de Fermat (1601-1665) a Evangelista Torricelli (1608-1647), matemático e físico italiano que inventou o barômetro. Em uma carta, Fermat desafiou Torricelli a solucionar o Problema 4.1.

Problema 4.1. *Determinar o ponto tal que a soma de suas distâncias aos vértices de um triângulo seja mínima.*

Torricelli apresentou várias soluções para o problema proposto por Fermat. Em uma dessas soluções, observou que as circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros construídos externamente sobre os lados do triângulo são concorrentes em um ponto [1]. Esse ponto recebeu o nome de Fermat, o proponente do problema.

Apresentamos nesta seção a demonstração baseada no Teorema 3.1 (de Napoleão) [1].

Demonstração. Sejam: o triângulo ABC ; o ponto M , interno ao triângulo ABC ; o triângulo ABM ; o triângulo $A'BM'$, oriundo da rotação de 60° do triângulo ABM em torno do vértice B - Figura 3(a).

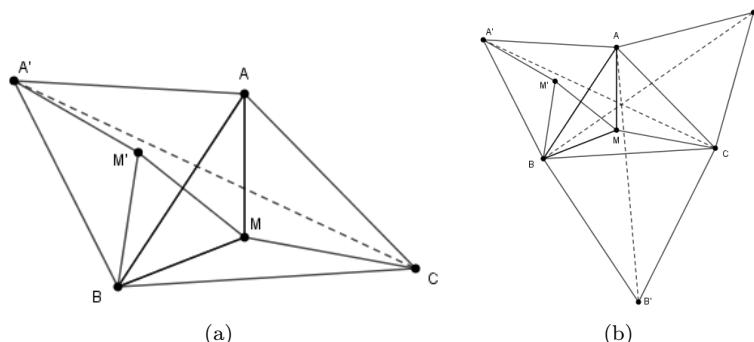


Figura 3: Triângulos para a prova do Problema 4.1. Fonte: Silva [17].

Por construção, temos que o triângulo BMM' é equilátero. Logo, $MB \equiv M'B$ e, como $MA \equiv M'A'$, temos que:

$$MA + MB + MC = A'M' + M'M + MC. \quad (20)$$

O ponto A' é obtido pela rotação de A em torno de B . Logo, a posição de A' não depende de M e temos que $MA + MB + MC \geq A'C$. Assim, a soma em (20) é mínima quando $M \in A'C$. Para tanto, é preciso que $\widehat{BMA'} = 60^\circ$ ⁴.

⁴Se a rotação fosse feita em torno do ponto A , deveríamos ter $\widehat{AMA'} = 60^\circ$.

Construindo triângulos equiláteros sobre os lados do triângulo ABC , obtemos os triângulos ABA' , ACC' e BCB' , e as retas $\overleftrightarrow{A'C}$, $\overleftrightarrow{AB'}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ se intersectam em um ponto - Figura 3(b).

O Teorema 3.1 (de Napoleão) garante que as retas $\overleftrightarrow{A'C}$, $\overleftrightarrow{AB'}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ se intersectam em um ponto e que o ângulo entre elas é de 120° . Temos então que $AB' \equiv BC' \equiv A'C = MA + MB + MC$, sendo M o ponto de Fermat. Portanto, o ponto de Fermat é único e se encontra na interseção das retas que passam pelos vértices opostos dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo ABC . No caso em que um dos ângulos do triângulo ABC é maior do que ou igual a 120° , o ponto de Fermat será o vértice correspondente ao maior ângulo do triângulo. \square

Construímos no GeoGebra uma atividade dinâmica para o ponto de Fermat, disponível em <https://www.geogebra.org/m/yyypd3p8>. No GeoGebra App, os vértices do triângulo ABC e o ponto M , interior a ABC , podem ser movidos dinamicamente para investigar novas configurações do triângulo e verificar a distância mínima quando M coincide com o ponto de Fermat.

5 Considerações Finais

Propomos neste trabalho atividades dinâmicas, construídas em páginas da plataforma GeoGebra e acessadas via links externos, para comprovar três teoremas geométricos clássicos: o teorema de Pitágoras, o teorema de Napoleão e o ponto de Fermat. Na composição das atividades, apresentamos inicialmente a demonstração formal dos teoremas para depois conduzir o(a) leitor(a) para uma experimentação dinâmica no GeoGebra. Essa dinâmica segue o método de apresentação de Alexander Bogomolny (1948-2018), matemático estadunidense nascido na Rússia, cujos trabalhos estão disponíveis na internet, como, por exemplo, em Bogomolny [1]. As experiências dinâmicas compõem atividades que podem ser aplicadas na Educação Básica, na Licenciatura em Matemática e no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Almejamos que as mesmas sirvam de inspiração aos(as) professores(as) de matemática da Educação Básica e do Ensino Superior no tocante ao emprego de tecnologias digitais como o GeoGebra nas aulas de geometria.

Agradecimentos

A autora Victoria Mazotti Rodrigues da Silva agradece à UTFPR Campus Curitiba pela concessão de uma bolsa de estudos durante doze meses, período em que este trabalho foi parcialmente desenvolvido.

Referências

- [1] A. Bogomolny. **The Fermat point and generalizations**. Online. Acessado em 08/02/2025, http://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat_point.shtml.
- [2] Brasil. **Base Nacional Comum Curricular**. Online. Acessado em 12/02/2025, https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf.
- [3] F. M. Fernandes. “Polígonos e poliedros equidecomponíveis”. Dissertação de mestrado. UTFPR Curitiba, 2018.
- [4] GeoGebra. **Ferramentas e recursos do GeoGebra**. Online. Acessado em 08/02/2025, <https://www.geogebra.org/>.

- [5] R. C Lago e R. L. Nós. “Investigando teoremas de geometria plana com o GeoGebra”. Em: **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo** 9(3) (2020), pp. 15–29. DOI: 10.23925/2237-9657.2020.v9i3p015-029.
- [6] F. Lamoen e E. W Weisstein. **Petr-Neumann-Douglas theorem**. Online. Acessado em 12/02/2025, <https://mathworld.wolfram.com/Petr-Neumann-DouglasTheorem.html>.
- [7] E. S. Loomis. **The pythagorean proposition**. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1968. ISBN: 978-0873530361.
- [8] A. C. M. Neto. **Geometria**. 1a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. ISBN: 978-85-85818-93-7.
- [9] J. C. C. Nóbrega. “Demonstrações matemáticas dinâmicas”. Em: **REVEMAT** 15(1) (2019), pp. 1–21. DOI: 10.5007/1981-1322.2019.e61725.
- [10] R. L. Nós e F. M. Fernandes. “Ensinando áreas e volumes por equicomposição”. Em: **Educação Matemática em Revista** 24(63) (2019), pp. 121–137.
- [11] R. L. Nós e R. C. Lago. “Investigando dinamicamente teoremas de geometria plana”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2019, pp. 010395-1–7. DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0395.
- [12] R. L. Nós, M. Sano e V. M. R. da Silva. “A dynamic view of some geometric loci via GeoGebra”. Em: **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática** 9(1) (2024), pp. 1–21. DOI: 10.34179/revisem.v9i1.19521.
- [13] R. L. Nós e V. M. R. da Silva. “Compondo/decompondo poliedros convexos com o GeoGebra 3D”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2019, pp. 010364-1–7. DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0364.
- [14] R. L. Nós e V. M. R. da Silva. “Radicais duplos no cálculo do volume de poliedros convexos”. Em: **Revista Eletrônica Paulista de Matemática** 16 (2019), pp. 53–70. DOI: 10.21167/cqdvol16201923169664rlnvmrss5370.
- [15] R. L. Nós e V. M. R. da Silva. “Using GeoGebra 3D in the composition/decomposition of convex polyhedra for volume calculation”. Em: **Journal of Engineering Research** 3(2) (2022), pp. 1–11. DOI: 10.22533/at.ed.317322221210.
- [16] J. J. da Silva. “A demonstração matemática da perspectiva da lógica matemática”. Em: **Bolema** 15(18) (2002), pp. 68–78.
- [17] V. M. R. da Silva. “Uma visão dinâmica de alguns teoremas geométricos clássicos via GeoGebra”. Dissertação de mestrado. UTFPR Curitiba, 2022.
- [18] V. M. R. da Silva e R. L. Nós. **Calculando o volume de poliedros convexos**. 1a. ed. Curitiba: CRV, 2018. ISBN: 978-85-444-2681-4.
- [19] V. M. R. da Silva, R. L. Nós e M. Sano. “Uma visão dinâmica do teorema de Pitágoras via GeoGebra”. Em: **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo** 12(1) (2023), pp. 62–77. DOI: 10.23925/2237-9657.2023.v12i1p062-077.
- [20] E. W. Weisstein. **Napoleon’s theorem**. Online. Acessado em 08/02/2025, <https://mathworld.wolfram.com/NapoleonsTheorem.html>.