Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Chryzode: uma Aplicação da Aritmética Modular

Adriano Verdério[1], Mari Sano[2], Patrícia M. Kitani[3]
DAMAT/UTFPR, Curitiba, PR
Paulo R. C. Porto[4]
Colégio Martinus, Curitiba, PR

Resumo. Neste trabalho abordamos os Chryzodes, figuras geométricas formadas por segmentos de retas que ligam pontos em uma circunferência sob certas condições. Apresentamos a sua construção, a qual envolve a aritmética modular, e em casos particulares, exibimos as curvas resultantes para evidenciar alguns padrões desta construção. Propomos também algumas atividades para alunos do Ensino Fundamental envolvendo os Chryzodes.

Palavras-chave. Chryzodes, Congruência, Aritmética Modular, GeoGebra.

1 Introdução

O primeiro contato da maioria dos estudantes com a matemática se dá com o aprendizado da aritmética. Os processos de contagem, operações básicas e relações entre os números naturais servem como base para todo o desenvolvimento matemático que virá ao longo do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Destacamos aqui as congruências aritméticas e sua relação próxima com as operações de multiplicação e divisão.

Sobre a congruência aritmética:

> Uma das ferramentas mais importantes na teoria dos números é a aritmética modular, pois a mesma envolve o conceito de congruência. Onde suas bases teóricas foram iniciadas pelo matemático suíço Euler, em meados de 1750, tornando-se mais acessível através das ideias do matemático alemão Carl Friedrich Gauss[...] [1, p. 11].

Neste trabalho tratamos de uma interessante aplicação das congruências aritméticas: os Chryzodes, que são representações geométricas obtidas ao marcar pontos sobre uma circunferência formando arcos congruentes e ligá-los por segmentos de retas conforme as operações básicas da aritmética.

O objetivo deste trabalho é apresentar a construção dos Chryzodes e propor atividades lúdicas por meio deles para que os estudantes percebam algumas propriedades dos números naturais e suas operações.

2 Os Chryzodes

A palavra Chryzode tem origem grega e significa "Escrita de ouro em um círculo", segundo Bello [2]. Os Chryzodes também são frequentemente apresentados como uma visualização da

[1] verderio@utfpr.edu.br
[2] marisano@utfpr.edu.br
[3] kitani@utfpr.edu.br
[4] ppaulorporto@gmail.com

operação de multiplicação, por isso também são conhecidos como ciclos de multiplicação. São figuras geométricas construídas a partir de m pontos distribuídos igualmente espaçados ao longo de uma circunferência. Cada ponto p é numerado ordenadamente de 0 a $(m-1)$, formando um conjunto completo de resíduos módulo m. Em seguida, constroem-se segmentos de reta unindo cada ponto p ao ponto congruente a $p \cdot a$ módulo m, com $a \in \mathbb{Z}$ fixo. Ainda também são frequentemente apresentados como uma visualização da operação de multiplicação, por isso também são conhecidos como ciclos de multiplicação.

Na Figura 1 temos um exemplo de Chryzode, gerado através da ferramenta desenvolvida por Mathias Lengler [4].

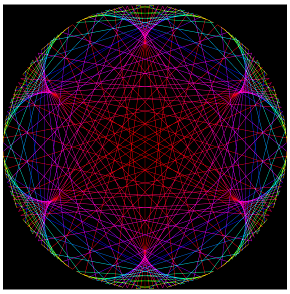


Figura 1: Exemplo de Chryzode. Fonte: Autores.

A seguir exibimos exemplo de um Chryzode, cujas imagens foram construídas através do software GeoGebra. O leitor pode explorar diferentes construções através do *applet* desenvolvido pelos autores [9].

Exemplo 2.1 (Construção do Chryzode de multiplicação por 3, módulo 10)**.** *Para construirmos o Chryzode de multiplicação por* 3*, módulo* 10*, distribuímos 10 pontos ao longo de uma circunferência e numeramos tais pontos de* 0 *a* 9*. Em seguida, traçamos segmentos ligando cada ponto* p *ao ponto* $p \cdot 3$ *módulo* 10*. Temos então a seguinte sequência de congruências e a Figura 2 ilustra o Chryzode.*

$$\begin{aligned} 0 \cdot 3 &\equiv 0 \mod 10 \\ 1 \cdot 3 &\equiv 3 \mod 10 \\ 2 \cdot 3 &\equiv 6 \mod 10 \\ 3 \cdot 3 &\equiv 9 \mod 10 \\ 4 \cdot 3 = 12 &\equiv 2 \mod 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3 = 15 &\equiv 5 \mod 10 \\ 6 \cdot 3 = 18 &\equiv 8 \mod 10 \\ 7 \cdot 3 = 21 &\equiv 1 \mod 10 \\ 8 \cdot 3 = 24 &\equiv 4 \mod 10 \\ 9 \cdot 3 = 27 &\equiv 7 \mod 10 \end{aligned}$$

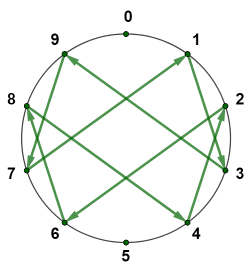
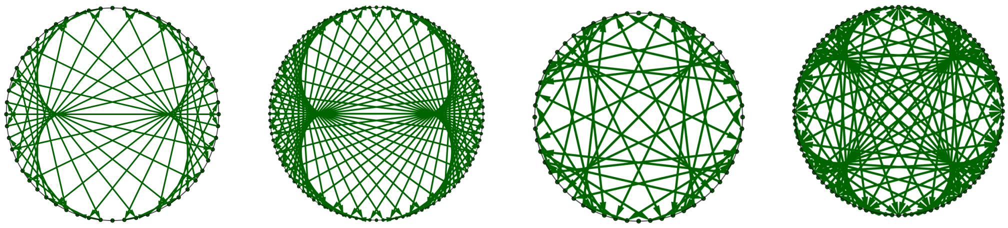


Figura 2: Chryzode obtido multiplicando por 3, módulo 10. Fonte: Autores.

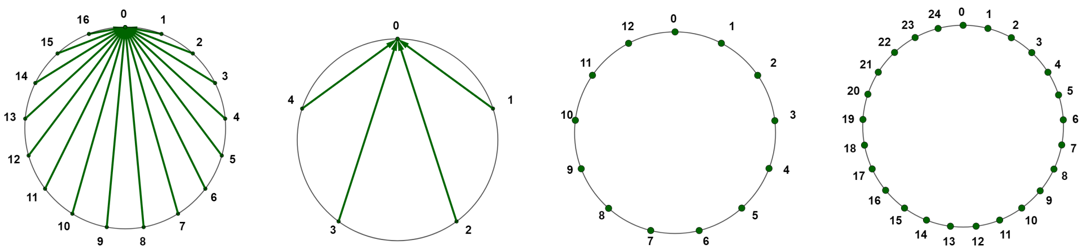
Comparando as formas obtidas, fixando-se $a = 3$ (Figura 3(a) e Figura 3(b)) e depois $a = 5$ (Figura 3(c) e Figura 3(d)) e variando o valor de m, podemos inferir que conforme a quantidade de pontos aumenta, obtemos variações de uma mesma forma que se tornam cada vez mais nítidas.



(a) $a = 3$, módulo 56 (b) $a = 3$, módulo 100 (c) $a = 5$, módulo 56 (d) $a = 5$, módulo 100

Figura 3: Chryzodes de multiplicação por 3 e 5 em diferentes módulos. Fonte: Autores.

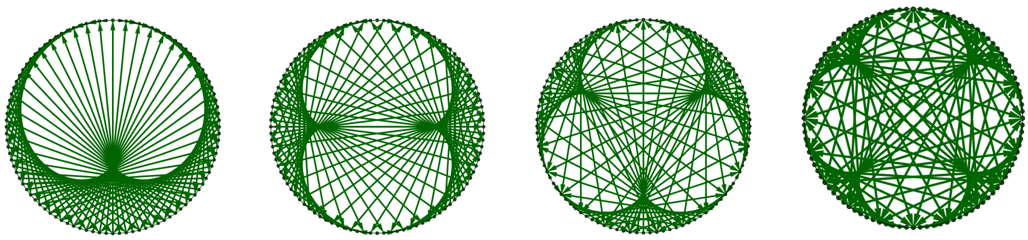
Vamos analisar alguns valores especiais de a. Por exemplo, se $a = 0$ ou $a = m$ (Figura 4(a) e Figura 4(b)), todos os pontos da construção serão ligados ao ponto 0 já que $p \cdot 0 \equiv 0 \mod m$ e $p \cdot m \equiv 0 \mod m$. Para $a = 1$ (Figura 4(c) e Figura 4(d)) obtemos uma figura que apenas mostra os m pontos, sem segmentos ligando quaisquer pontos, pois $p \cdot 1 \equiv p \mod m$.



(a) $a = 0$, módulo 17 (b) $a = 5$, módulo 5 (c) $a = 1$, módulo 13 (d) $a = 1$, módulo 25

Figura 4: Chyzodes com multiplicador 0 e 1. Fonte: Autores.

Para $a \geq 2$ os padrões tornam-se mais interessantes. Konageski e Sano [3] afirmam que para $a = 2$ a curva envolvente fornecida pelo processo de construção de Chryzode tem a forma de uma pétala, e nesse caso tem o formato da curva conhecida como cardioide (Figura 5(a)). Quando $a = 3$ temos duas pétalas compondo a curva chamada nefroide (Figura 5(b)). Quando $a = 4$ temos três (Figura 5(c)), para $a = 5$ temos quatro (Figura 5(d)) e assim por diante, ou seja, para $a \geq 2$ temos $(a - 1)$ pétalas na figura obtida.

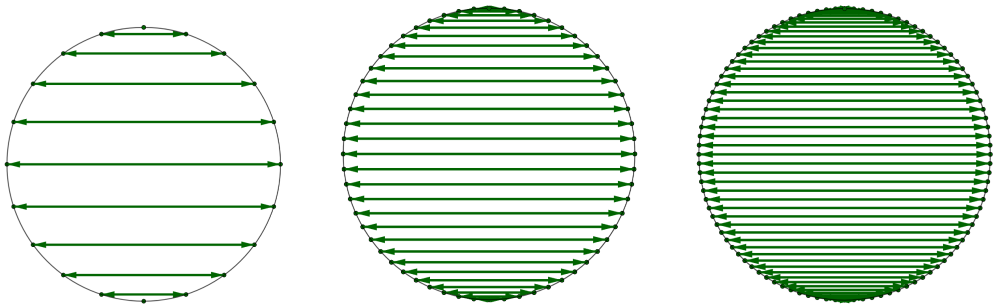


(a) $a = 2$, módulo 100. (b) $a = 3$, módulo 100 (c) $a = 4$, módulo 100 (d) $a = 5$, módulo 100

Figura 5: Chryzodes obtidos fixando-se $m = 100$ e $a = 2, 3, 4$ e 5. Fonte: Autores.

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0259

Caso $a = m - 1$, obtemos figuras com linhas retas horizontais, ou seja, cada ponto p é ligado ao ponto $m - p$ módulo m. Isto se dá pois, se $a = m - 1$, então $p \cdot a = p \cdot (m - 1) \equiv m - p \mod m$. Vejamos exemplos nas Figuras 6(a), 6(b) e 6(c).



(a) $a = 19$, módulo 20 (b) $a = 59$, módulo 60 (c) $a = 99$, módulo 100

Figura 6: Chryzodes para $a = (m - 1)$. Fonte: Autores.

Outras formas e propriedades podem ser encontradas em [8].

3 Propostas de Atividades

Nesta seção apresentamos algumas sugestões de propostas didáticas com a finalidade de aprofundar o conhecimento sobre a aritmética modular para professores de matemática, explorando os padrões presentes nos Chryzodes. As congruências aritméticas não são objetos diretos de estudo no ensino básico. Porém, as fascinantes formas obtidas ao se construir Chryzodes atuam como uma representação visual das operações de multiplicação e divisão, sendo assim excelentes ferramentas para uma compreensão mais profunda dessas operações.

Para a visualização das formas estudadas, sugerimos o uso do material disponibilizado em [9], onde os alunos podem visualizar e explorar esta figura antes de realizarem as atividades.

Buscamos propor práticas lúdicas atreladas a técnicas de desenho geométrico, com o intuito de facilitar a visualização dos padrões. As atividades são adaptáveis para diversas realidades de sala de aula e podem ser aplicadas em diferentes contextos. Estão voltadas para alunos do 8^o e 9^o anos, com duração de 2 aulas de 45 minutos. Aqui elas são apresentadas de forma resumida. Para uma versão mais detalhada, consulte a dissertação de mestrado do PROFMAT: *A aritmética modular das estrelas e dos Chryzodes* [8].

3.1 Proposta I - Desenhando Chryzodes

Nesta atividade propomos uma abordagem direta dos Chryzodes e seu estudo através da construção geométrica de alguns Chryzodes e da observação dos padrões de multiplicação análogos. A atividade pode ser toda realizada utilizando-se folhas em branco e material de desenho geométrico, mas podem ser fornecidas folhas com pontos numerados e igualmente espaçados ao redor de uma circunferência previamente pronta. Essa folha pode ser encontrada no Apêndice da dissertação de mestrado do PROFMAT de Porto [8].

O objetivo geral da atividade é apresentar os Chyzodes e sua construção geométrica, enfatizando a sua relação com a multiplicação.

Os objetivos específicos são: estimular a capacidade de desenho geométrico de figuras planas, apresentar o conceito de Chryzode, analisar a relação entre os Chryzodes e a multiplicação de números naturais, estabelecer o raciocínio análogo à congruência aritmética através da divisão euclidiana, incentivar observações sobre os padrões geométricos estabelecidos nas construções e trabalhar a divisão de uma circunferência em m partes.

Os materiais necessários são: papel sulfite ou cartonado ou impressões disponíveis no Apêndice em [8], compasso, régua, transferidor, lápis de cor/canetinhas, computador e tela/projetor conectados.

Sugerimos que o docente apresente aos estudantes o conceito de Chryzodes e utilize os links disponibilizados por Lengler [4] e Porto [9], e os vídeos do canal LesChryzodes [5, 6] para mostrar referências visuais e exemplos.

Na atividade, o professor inicia mostrando variações de Chryzodes disponibilizado por Porto [9] e exemplos de multiplicações com diferentes valores, destacando padrões como pétalas e casos específicos para a. Os alunos, utilizando modelos impressos ou construindo suas próprias circunferências com pontos, criarão Chryzodes com valores de a escolhidos, incluindo casos específicos e livres. A congruência é introduzida se o professor achar pertinente, mas sugerimos o uso do algoritmo de Euclides. Os alunos devem anotar os resultados das multiplicações e dos restos das divisões para traçar os segmentos, finalizando suas criações com cores e padrões. Ao final, o professor promove uma discussão sobre os padrões observados.

3.2 Proposta II - Jogo da Multiplicação

Propomos agora uma atividade prática em formato de jogo, na qual os estudantes trabalharão conceitos relacionados aos Chryzodes, sem abordar diretamente o tema, a partir da divisão euclidiana. No jogo da multiplicação, os estudantes deverão utilizar resultados aleatórios para calcular produtos e quocientes, anotar os valores dos restos e pontuar conforme tais valores. Esta atividade é uma adaptação do jogo que pode ser encontrado em [7].

O objetivo geral da atividade é gamificar o aprendizado de multiplicações e restos da divisão de um número natural por outro.

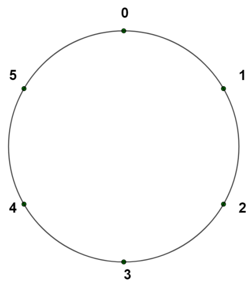
Os objetivos específicos são: estimular o cálculo mental de multiplicações, calcular o resto da divisão de um número natural por outro, perceber padrões presentes em figuras planas, desenhar figuras associadas a Chryzodes e estabelecer a relação entre os possíveis restos da divisão e a divisibilidade entre o numerador e o divisor.

Os materiais necessários são: 3 dados comuns (6 lados) por grupo, folhas impressas com tabela para registrar as somas dos dados (Tabela 1), uma folha com desenhos de circunferência com pontos numerados de 0 a 5 Figura 8(a), folha impressa Figura 8(b) e papel para marcar os produtos e resíduos.

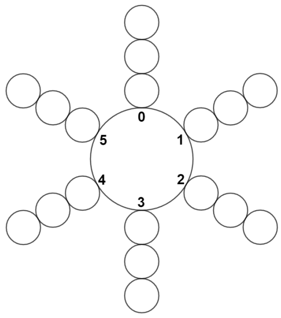
Tabela 1: Tabela de resultados "a".

Rodada	Soma "a"

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 12, n. 1, 2026.



(a) Base para os Chryzodes



(b) Resíduos módulo 6

Figura 7: Modelos para impressão. Fonte: Autores.

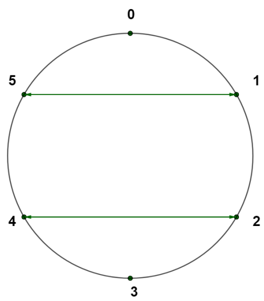
Para esta atividade, sugerimos o cálculo de resíduos módulo 6, mas a atividade pode ser adaptada para outros módulos. Os alunos se organizam em pequenos grupos (até 6 alunos). Na primeira rodada, cada aluno lança os três dados, soma os resultados e registra o valor a na tabela.

Para cada ponto da circunferência (0 a 5) da Figura 7(a), o aluno multiplica o número do ponto por a e calcula o resto da divisão por 6 (resíduo módulo 6). Em seguida, desenha flechas ligando cada ponto ao ponto correspondente ao resíduo calculado. Por fim, anota os produtos calculados nos espaços correspondentes aos resíduos na folha (Figura 7(b)). Após todos do grupo realizarem esta etapa, começa uma nova rodada. Se o valor da soma dos dados já foi obtido pela mesma pessoa, este deve relançar os dados. O primeiro aluno a preencher três valores diferentes para cada resíduo módulo 6 vence.

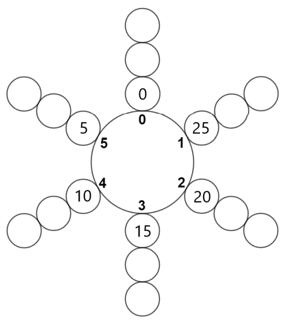
Por exemplo, suponhamos que o lançamento de dados resultou em: 2, 1, 2. A soma "a" é 5. O estudante anota este valor na tabela de resultados "a" e, em seguida, calcula os resíduos:

$$0 \cdot 5 \equiv 0 \mod 6 \qquad 2 \cdot 5 = 10 \equiv 4 \mod 6 \qquad 4 \cdot 5 = 20 \equiv 2 \mod 6$$
$$1 \cdot 5 \equiv 5 \mod 6 \qquad 3 \cdot 5 = 15 \equiv 3 \mod 6 \qquad 5 \cdot 5 = 25 \equiv 1 \mod 6$$

Após isso, o aluno deve desenhar flechas formando um Chryzode, vide Figura 8(a). Para finalizar a rodada, anota os produtos calculados nos círculos referentes a cada respectivo resíduo módulo 6, conforme o exemplo na Figura 8(b).



(a) Chryzode de multiplicação por 5, módulo 6



(b) Preenchimento dos valores relativos à cada resídulo módulo 6

Figura 8: Exemplo de preenchimento. Fonte: Autores.

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0259

Logo, começam com uma outra rodada (repetindo o processo anterior) até que um aluno consiga preencher três valores diferentes para cada resíduo módulo 6.

Após o jogo, o professor promove uma discussão com questões previamente elaboradas.

4 Considerações Finais

O intuito deste trabalho é proporcionar uma aplicação da aritmética modular com a construção de Chryzodes, os quais atuam como uma representação visual das operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.

As atividades propostas permitem que os estudantes constatem as relações aritméticas entre os números e suas operações mediante a construção geométrica de alguns Chryzodes, além de associar conteúdos da aritmética e geometria. Os professores podem explorar e aprofundar as atividades propostas para esses objetivos.

Almejamos que esta aplicação ofereça uma oportunidade de expansão do repertório teórico do docente, bem como propostas de atividades que servem como um primeiro contato com este assunto, por parte dos estudantes. A aplicação de tais atividades pode ser uma experiência muito enriquecedora, tanto para os discentes quanto para o docente.

Referências

[1] F. Almeida. "Aritmética modular e suas aplicações: uma experiência de atuação no ensino básico". Dissertação de mestrado. Universidade Estadual do Maranhão, 2019.

[2] M. G. Bello. "La aritmética modular y algunas de sus aplicaciones". Dissertação de mestrado. Universidad Nacional de Colombia, 2011.

[3] D. M. Konageski e M. Sano. "Uma experiência concreta na aritmética modular: Chryzodes". Em: **Professor de Matemática Online** 2 (2023), pp. 275–294. DOI: `10.21711/2319023x2023`.

[4] M. Lengler. **TimesTableWebGL**. Online. Acessado em 28/02/2025, `https://times-tables.lengler.dev`.

[5] LesChryzodes. **Chryzode en lignes: multiplication par 3 dans un cercle partagé en 211 points equidistants**. Online. Acessado em 28/02/2025, `https://www.youtube.com/watch?v=QFqScUVfj-0`.

[6] LesChryzodes. **Construction du chryzode en lignes | multiplication par 3 dans un cercle partagé en 61 points**. Online. Acessado em 28/02/2025, `https://www.youtube.com/watch?v=Bpv4Nw5O990`.

[7] NRICH. **The twelve pointed star game**. Online. Acessado em 28/02/2025, `https://nrich.maths.org/problems/twelve-pointed-star-game`.

[8] P. R. C. Porto. "A aritmética modular das estrelas e dos Chryzodes". Dissertação de mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2024.

[9] P. R. C. Porto. **Chryzodes**. Online. Acessado em 11/03/2025, `https://www.geogebra.org/m/jqrwsgpr`.

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0259