Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Um Estudo Fuzzy Para os Modelos de Gompertz, Verhulst e von Bertalanffy que Descrevem o Crescimento de Tilápias Oreachromis Niloticus

Roberto A. C, Prata[1], Sílvia D. Souza[2], Diogo S. Silva[3]
DM/UFAM, Manaus, AM

Resumo. A ideia de se fazer um estudo sobre o crescimento de tilápias do Nilo surgiu com a leitura de vários artigos que versam sobre insegurança alimentar no Estado de Minas Gerais e o parâmetro que mais influência no crescimento da tilápia é incerto. Assim sendo objetivamos comparar os modelos de crescimento de Gompertz, Verhulst e de von Bertalanffy, inserindo incertezas fuzzy, e verificamos qual destes é o que melhor se ajusta aos dados experimentais realizados pelo Centro de Pesquisas Ictiológicas Rodolpho von Ihering, para modelar o crescimento linear de machos albinos de tilápia do Nilo. Através do princípio da extensão de Zadeh, estendemos as soluções clássicas substituindo um dos parâmetros em cada solução por um número fuzzy, e analisamos quais dados empíricos são englobados pelas soluções fuzzy. Obtivemos que o modelo de von Bertalanffy fuzzy foi, ligeiramente, melhor do que o de Verhulst, e ambos consideravelmente melhores que o de Gompertz em relação ao crescimento médio dos dados utilizados.

Palavras-chave. Equações Diferenciais Fuzzy, Modelos de Crescimento Populacional, Biomatemática.

1 Introdução

A criação de tilápia em cativeiro teve início no Quênia em 1924 e no Congo em 1937, com destaque para três espécies: Tilápia do Nilo, Tilápia-azul e Tilápia-mossambicus. No Brasil, a Tilápia do Nilo, introduzida em 1996, é a principal espécie cultivada, representando 60,6% da produção nacional de peixes em 2020 e 88,17% das exportações, gerando US$ 10,3 milhões [5]. Ressalta-se também que a produção de tilápias tem um papel relevante na diminuição da insegurança alimentar em algumas regiões do País.

Na literatura, uma análise dos modelos matemáticos de von Bertalanffy, Gompertz e Verhulst concluiu que o modelo de von Bertalanffy é considerado o mais adequado para descrever o crescimento médio dos exemplares analisados em um experimento previamente conduzido pelo Centro de Pesquisas Ictiológicas Rodolpho von Iherin [7].

Neste trabalho faremos um estudo que rege o crescimento da tilápia do Nilo onde o índice de amadurecimento sexual do animal é incerto (fuzzy). Estudamos soluções fuzzy dos modelos mencionados, estimando o crescimento linear dos machos albinos da tilápia do Nilo, e ainda verificar se o modelo de von Bertalanffy é o mais adequado aos dados experimentais.

[1]praroberto@ufam.edu.br
[2]silviasouza@ufam.edu.br
[3]sampaiodiogo.dasilva@gmail.com

2 Referencial Teórico

As propriedades apresentadas na seção abaixo nos dão subsídios para obtenção dos resultados deste artigo [2] e [3].

2.1 Modelo de von Bertalanffy

O modelo obtido pelo biólogo Ludwig von Bertalanffy, em estudo de peixes, é fundamentado no princípio da alometria e leva em consideração os processos de catabolismo e anabolismo, tendo como produto a perda e ganho de massa, respectivamente. Esse princípio, traduzido em termos de equação, em função do tempo, está descrito a seguir:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha S - \beta p \ , \tag{1}$$

onde α é a constante de anabolismo (taxa de síntese de massa por unidade de área) e β a constante de catabolismo (taxa de decaimento de massa por unidade de massa) da espécie. Neste modelo, a área da superfície (S) é proporcional à massa (p) na forma $S \ \alpha \ p^{\gamma}$. Como a massa e a área fisiológica do peixe são proporcionais ao comprimento linear l temos:

$$\begin{cases} \dfrac{dl}{dt} = \gamma(b\alpha - \beta l) \\ l(0) = l_0 \end{cases} , \tag{2}$$

onde l_0 é o comprimento inicial e l_∞ o comprimento assintótico, t é o tempo em meses e k mede a taxa exponencial de aproximação ao valor assintótico.

2.2 Modelo de Verhulst

Modelo de Verhulst, também conhecido como Modelo Logístico, foi formulado pelo matemático belga Pierre F. Verhurst em 1873 e foi o primeiro modelo que atendeu à variação da taxa de crescimento, baseado em uma observação feita por Adolphe Quetelet, que sugeriu que o crescimento exponencial não seria possível em um longo período de tempo. Neste modelo, a taxa de crescimento é considerada como sendo proporcional à população em cada instante, e sua equação é dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = KP - (1 - \frac{P}{P_\infty}) \\ P(0) = P_0 \end{cases} . \tag{3}$$

2.3 Modelo de Gompertz

O matemático inglês Benjamin Gompertz, em 1938, desenvolveu um modelo muito parecido com o de Verhulst que utiliza uma taxa de inibição da variável de estado proporcional ao logaritmo desta variável. O significado disto é que a taxa de crescimento é alta no início do processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento.

O modelo de Gompertz é dado por um problema de Cauchy, cuja equação é dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = aP - bP\ln P = P(a - b\ln P) \\ P(0) = P_0 \end{cases} . \tag{4}$$

.

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0344

2.4 Um Pouco da Teoria Fuzzy

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy foi criada em 1965 pelo matemático Lotfi Asker Zadeh, com a intenção principal de oferecer um tratamento matemático a expressões linguísticas subjetivas, como "aproximadamente" e "em torno de", entre outras. Essa teoria constituiu um avanço inicial para a programação e armazenamento de conceitos vagos em sistemas computacionais, permitindo que cálculos fossem realizados com dados imprecisos, algo que os seres humanos costumam fazer de forma natural. Por exemplo, é intuitivo dizer que o dobro de uma quantidade "em torno de 3" resulta em outra quantidade "em torno de 6" [4].

Definição 2.1 (Função de Pertinência). *Fixado um conjunto universo U, dizemos A é um subconjunto fuzzy de U fixando uma função $\varphi_A : U \to [0,1]$, chamada Função de Pertinência de A, de modo que Os valores $\varphi_A(x) = 1$ e $\varphi_A(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência e a não pertinência do elemento x a A.*

O método de extensão proposto por Zadeh, também conhecido como Princípio de Extensão, é uma das ideias fundamentais que permitem a ampliação de conceitos matemáticos não fuzzy para o contexto fuzzy [4]. O objetivo do princípio de extensão é obter a "imagem" de um conjunto fuzzy por meio de uma função. Suponha $f : U \to V$. Se $A \subset U$ no sentido clássico, a imagem de A é $B = f(A) = \{f(u) : u \in A\} \subset V$. Se A for um conjunto fuzzy, empregamos a seguinte definição:

Definição 2.2 (Extensão de Zadeh). *Seja $B = f(A)$, então B será um subconjunto fuzzy de V, cuja função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)}\{\varphi_A(x)\} & se\ f^{-1}(z) \neq \emptyset, \\ 0 & se\ f^{-1}(z) = \emptyset. \end{cases} \tag{5}$$

Definição 2.3 (α-nível). *Seja A um conjunto fuzzy de um espaço topológico U. Então, para cada $\alpha \in (0,1]$, o α-nível de A é $[A]^\alpha = \{a \in U; \varphi_A \geq \alpha\}$. O suporte de A é $suppA = \{a \in U; \varphi_A > 0\}$. E para $\alpha = 0$, o α-nível de A é $[A]^\alpha = \overline{suppA}$.*

Lema 2.1 ([2]). *Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U. Uma condição necessária e suficiente para que $A = B$ seja válido é que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$.*

Definição 2.4. *Um subconjunto fuzzy A de $\mathbb{R}$ é chamado de número fuzzy se cada α-nível de A é um intervalo compacto e não vazio de $\mathbb{R}$.*

3 Crescimento Linear de Machos Albinos de Tilápia do Nilo

Esta seção é baseada no artigo [7], onde são apresentados os modelos estudados para o crescimento linear da tilápia do Nilo. Nele, constatou-se que o modelo de von Bertalanffy é o mais adequado para descrever o crescimento linear médio dos exemplares de machos albinos da tilápia do Nilo analisados.

Os dados são provenientes de um experimento previamente conduzido pelo Centro de Pesquisas Ictiológicas Rodolpho von Ihering, o qual está situado no município de Pentecostes no Ceará. Os valores de comprimento, massa e consumo de ração, em função do tempo, da espécie tilápia do Nilo estão apresentados na Tabela 1 [1]. A partir destes dados, foram utilizados os modelos matemáticos de von Bertalanffy, Gompertz e Verhulst para descrever o crescimento linear desses exemplares.

As representações matemáticas destes modelos estão ilustradas na Tabela 2. Os parâmetros adotados nas equações têm os seguintes significados [3, 6]: $l(t)$ caracteriza o valor do comprimento (cm) em função do tempo (meses); l_∞ é o valor assintótico do comprimento do peixe em centímetros; B significa uma constante de integração que envolve os valores do comprimento e o l_∞, somente

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0344

Tabela 1: Dados de crescimento ao longo dos meses. Fonte[7]

Tempo (meses)	**Comprimento médio (cm)**	**Massa média (g)**	**Consumo de ração (g)**
0	11.0	26.0	0.0
1	15.0	59.5	12.3
2	17.4	105.4	27.9
3	20.5	200.0	49.8
4	22.7	239.5	56.7
5	25.3	364.5	65.4
6	27.4	421.7	95.6
7	28.0	476.0	106.3
8	29.3	488.2	128.5

para Verhulst e von Bertalanffy; k mensura a taxa exponencial de aproximação ao valor assintótico, isto é, o índice de precocidade do animal, ou seja, quanto maior o índice, mais rápido amadurece sexualmente o peixe; t_c descreve a ubiquação do ponto de inflexão em termos de t, ele informa o dia em que a taxa de crescimento dos peixes é máxima, somente para Gompertz. As equações obtidas para estes modelos foram extraídas do trabalho [7]. As soluções gerais foram extraídas de [3, 6]. Além disso, são apresentadas as soluções para as equações que se encontram na Tabela 2, utilizando os dados da Tabela 1, além dos parâmetros l_∞ e k, estimados pelo método de Ford-Walford [7], chamadas soluções determinísticas. De acordo com [7], a solução com melhor ajuste linear ao crescimento médio observado é do Modelo de von Bertalanffy.

Tabela 2: Equações ajustadas ao crescimento da Tilápia do Nilo. Fonte: [3, 6, 7]

Modelos	**Solução geral**	**Solução determinística**
Gompertz	$l(t) = l_\infty \left(\dfrac{l_0}{l_\infty}\right)^{e^{-kt}}$	$l(t) = 30,890 \cdot (0,356)^{e^{-0,310t}}$
Verhulst	$l(t) = l_\infty \left(1 + Be^{-kt}\right)^{-1}$	$l(t) = \dfrac{30,590}{1 + 1,812e^{-0,444t}}$
von Bertalanffy	$l(t) = l_\infty (1 - Be^{-kt})$	$l(t) = 36,309 \cdot \left(1 - 0,694e^{-0,161t}\right)$

4 Resultados

Para obtermos os gráficos das soluções fuzzy dos modelos, aplicamos o princípio da extensão de Zadeh, tomando o parâmetro k (índice de amadurecimento sexual do animal) como um número fuzzy. Este parâmetro foi contemplado por ser um dos que mais influencia no crescimento dos peixes, embora tenha menor variação [5].

Na Figura 1, apresentamos, da esquerda para direita, soluções clássicas em vermelho e soluções fuzzy em preto para os modelos: de Gompertz, tomando o parâmetro k fuzzy como número fuzzy triangular dado pelo terno ordenado $(0.28, 0.31, 0.34)$; de Verhulst, tomando o parâmetro fuzzy k como número fuzzy triangular dado pelo terno ordenado $(0.378, 0.444, 0.51)$; e de von Bertalanffy, tomando o parâmetro fuzzy k como número fuzzy triangular dado pelo terno ordenado $(0.141, 0.161, 0.181)$. Em todos os casos, a solução clássica é respectiva solução determinística da Tabela 2, enquanto a solução fuzzy associa um número real dado por um instante t em meses, a um comprimento dado por um número fuzzy que busca modelar os comprimentos previstos em centímetros.

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0344

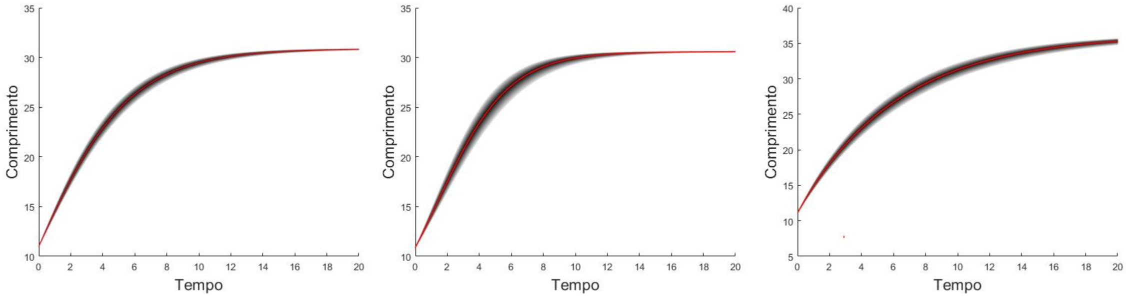

Figura 1: Da esquerda para direita: Soluções clássicas e fuzzy para o modelos de Gompertz, Verhulst e von Bertalanffy, respectivamente. Fonte: Os autores.

Na Figura 2, apresentamos um gráfico comparando os dados da Tabela 1 com as soluções determinísticas da tabela 2.

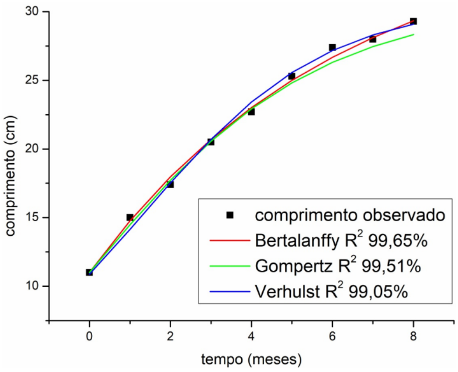

Figura 2: Dados empíricos comparados com as soluções clássicas. Fonte: [7].

A seguir apresentamos as tabelas que indicam os resultados obtidos quando consideramos o parâmetro k fuzzy para os modelos de crescimento para a tilápia do Nilo. Constata-se que o modelo fuzzy que melhor rege o crescimento é o modelo de von Bertalanffy. Os dados foram obtidos através de um código em linguagem Python calculando a imagem de cada função fuzzy em determinado instante, através do site *Online Python*.

Tabela 3: Comparando os dados com o modelo de Gompertz Fuzzy.

t	l médio	$l(t)$	Engloba os dados?
0	11	$(10.9968, 10.9968, 10.9968)$	Sim
1	15	$(14.1518, 14.4821, 14.8099)$	Não
2	17.4	$(17.1239, 17.7224, 18.3052)$	Sim
3	20.5	$(19.7776, 20.5514, 21.2850)$	Sim
4	22.7	$(22.0529, 22.9094, 23.6970)$	Sim
5	25.3	$(23.9446, 24.8093, 25.5785)$	Sim
6	27.4	$(25.4812, 26.3021, 27.0081)$	Não
7	28	$(26.7077, 27.4539, 28.0740)$	Sim
8	29.3	$(27.6736, 28.3305, 28.8582)$	Não

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0344

Tabela 4: Comparando os dados com o modelo de Verhulst Fuzzy.

t	l médio	$l(t)$	Engloba os dados?
0	11	$(10.8783, 10.8783, 10.8783)$	Não
1	15	$(13.6463, 14.1467, 14.6497)$	Não
2	17.4	$(16.5279, 17.5241, 18.5013)$	Sim
3	20.5	$(19.3241, 20.6930, 21.9699)$	Sim
4	22.7	$(21.8580, 23.4084, 24.7570)$	Sim
5	25.3	$(24.0159, 25.5598, 26.7984)$	Sim
6	27.4	$(25.7583, 27.1612, 28.1946)$	Sim
7	28	$(27.1060, 28.2984, 29.1051)$	Sim
8	29.3	$(28.1139, 29.0795, 29.6807)$	Sim

Tabela 5: Comparando os dados com o modelo de von Bertalanffy Fuzzy.

t	l médio	$l(t)$	Engloba os dados?
0	11	$(11.1106, 11.1106, 11.1106)$	Não
1	15	$(14.4244, 14.8578, 15.2825)$	Sim
2	17.4	$(17.3025, 18.0477, 18.7638)$	Sim
3	20.5	$(19.8020, 20.7633, 21.6686)$	Sim
4	22.7	$(21.9729, 23.0751, 24.0926)$	Sim
5	25.3	$(23.8582, 25.0431, 26.1152)$	Sim
6	27.4	$(25.4956, 26.7184, 27.8029)$	Sim
7	28	$(26.9177, 28.1446, 29.2112)$	Sim
8	29.3	$(28.1528, 29.3587, 30.3864)$	Sim

5 Considerações Finais

Constatamos que os modelos Verhulst e von Bertalanffy fuzzy são adequados para descrever o crescimento das tilápias do Nilo com cultivo de até 8 meses no Ceará, pois foram pequenas as diferenças existentes entre eles. Após a análise dos dados nas Tabelas 3, 4 e 5, observamos que o desempenho do modelo de von Bertalanffy fuzzy foi ligeiramente melhor do que o de Verhulst e o de Gompertz para descrever o crescimento médio dos exemplares analisados.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

[1] R. M. G. Araújo J. C.; Marquez. “Modelos de von Bertalanffy e Gompertz para descrever os parâmetros de tamanho e peso médio de tilápias”. Em: **Cadernos do IME:Série Matemática** 20 (2008), pp. 41–50. DOI: `10.12957/cadmat.2008.11849`.

[2] L. C. Barros, R. C Bassanezi e W. A. Lodwick. **A First Course in Fuzzy Logic,Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics. Theory and Applications**. Studiesin Fuzziness and Soft Computing. Springer, 2017. ISBN: 978-3-662-53322-2.

[3] R. C. Bassanezi. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática.** 3a. ed. Campinas: Contexto, 2002. ISBN: 8572442073.

[4] R. S. M. Jafelice, L. C. Barros e R. C Bassanezi. **Teoria dos Conjuntos Fuzzy com Aplicações**. Notas em Matematica Aplicada. SBMAC, 2023. ISBN: 978-65-86388-13-8.

[5] A. S. Oliveira. "Influência dos fatores ambientais no crescimento da tilápia do Nilo (Oreochromis niloticus) em viveiros escavados no brejo paraibano". Dissertação de mestrado. UFCG, 2010.

[6] P. C. J. Sarmiento. "Modelagem do Crescimento de Truta Arco-íris na Fase Engorda." Dissertação de mestrado. UFRRJ, 2018.

[7] W. Trindade e R. A. C. Prata. "Análise dos modelos Gompertz, Verhulst e de von Bertalanfly para o crescimento linear dos machos albinos da tilápia do Nilo". Em: **REMAT: Revista Eletrônica Da Matemática** (2024), e3008. DOI: `10.35819/remat2024v10i1id6762`.

