

Comparação de Três Versões do Modelo de Sel'kov: Clássica, Derivada Fracionária de Caputo e Derivada Fracionária de Riemann-Liouville

Sandro R. Mazorche¹ Esther S. M. Gonçalves² Tiago F. C. Santos³
Matemática-ICE/UFJF, Juiz de Fora, MG

Resumo. No presente trabalho, apresentamos três versões do modelo de Sel'kov(1968 [8]). A versão clássica, usado para descrever oscilações glicolíticas, uma versão em derivada fracionária de Caputo, dada em [6], que foi usada para descrever fenômenos microssísmicos e nossa proposta em derivadas fracionárias baseado na técnica apresentado em [4] e [5] onde teremos o operador de Riemann-Liouville presente no modelo. Usando o método numérico L1, apresentaremos uma comparação das três formas do modelo de Sel'kov exibindo as soluções, trajetórias de fase e pontos de equilíbrio.

Palavras-chave. Modelo de Sel'kov, Derivada Fracionária de Caputo, Derivada Fracionária de Riemann-Liouville, Sistema não Linear e Sistemas Fracionários.

1 Introdução

O modelo de Sel'kov é um sistema dinâmico não linear proposto para descrever oscilações glicolíticas em sistemas bioquímicos, especificamente envolvendo substratos e produtos. Ele é conhecido por exibir comportamentos auto-oscilatórios, o que o torna útil para modelar fenômenos como as vibrações glicolíticas. Originalmente, o modelo foi aplicado em biologia, mas também tem sido adaptado para descrever fenômenos microssísmicos. A versão fracionária do modelo de Sel'kov incorpora a influência da hereditariedade (memória) no sistema, o que é feito utilizando derivadas fracionárias no sentido de Caputo. Derivadas fracionárias são particularmente úteis para modelar sistemas com dependência temporal de longo alcance ou memória, o que é comum em processos biológicos e físicos complexos.

A estrutura do trabalho segue com uma seção de resultados básicos e definições de derivadas fracionária depois segue para apresentação dos Modelos Clássicos e com derivada fracionária de Caputo e então apresentamos a construção da nossa proposta de fracionarizar o modelo de Sel'kov e por fim temos resultados numéricos onde apresentaremos as soluções, trajetória de fase e pontos de equilíbrio finalizando com as considerações finais.

2 Preliminares

Nesta seção, apresentaremos brevemente os conceitos e resultados fundamentais do cálculo fracionário necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Para uma discussão mais abrangente, recomendamos consultar [1] e [7].

¹sandro.mazorche@uff.br

²esther.scarton@estudante.ufjf.br

³tiago.santos@estudante.ufjf.br

Função Gama e Função Gama Incompleta:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt; \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \gamma(z, t) = \int_0^t e^{-\theta} \theta^{z-1} d\theta; \quad z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Integral de Riemann-Liouville: A integral fracionária de Riemann-Liouville com ordem α é definida para $t \in [a, b]$ por:

$$I_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\theta)^{\alpha-1} f(\theta) d\theta. \quad (2)$$

onde Γ é a função Gama.

Derivada de Riemann-Liouville: A derivada fracionária de Riemann-Liouville com ordem α é definida para $t \in [a, b]$ por:

$${}_a^{RL} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\theta)}{(t-\theta)^{\alpha-n+1}} d\theta. \quad (3)$$

onde Γ é a função Gama.

Derivada de Caputo: A derivada fracionária de Caputo com ordem α é definida para $t \in [a, b]$ por:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\theta)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\theta^n} f(\theta) d\theta. \quad (4)$$

onde Γ é a função Gama. Duas propriedades úteis para a derivada de Caputo é que a derivada de Caputo de uma constante não nula é zero e que as condições iniciais de um problema de valor inicial são as mesmas quando usado a derivada de Caputo.

Função de Mittag-Leffler com um, dois e três parâmetros: Seja $z \in \mathbb{C}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\rho \in \mathbb{R}$ três parâmetros tais que $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\operatorname{Re}(\beta) > 0$, $\rho > 0$. Definimos a função de Mittag-Leffler com três parâmetros através da série de potência

$$E_{\alpha, \beta}^\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \quad (5)$$

onde $(\rho)_k$ é o símbolo de Pochhammer. Particularmente, quando $\rho = 1$, temos a função Mittag-Leffler de dois parâmetros, denotada simplesmente por $E_{\alpha, \beta}^1(t) = E_{\alpha, \beta}(t)$. Já quando $\rho = \beta = 1$, obtemos a função Mittag-Leffler de um parâmetro, denotada por $E_{\alpha, 1}^1(t) = E_{\alpha, 1}(t) = E_\alpha(t)$.

A Transformada de Laplace da integral fracionária de Riemann-Liouville é dada por:

$$\mathcal{L}[I_{0+}^\alpha f(t)](s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}[f(t)](s). \quad (6)$$

A Transformada de Laplace da derivada fracionária de Riemann-Liouville é dada por:

$$\mathcal{L}[{}_a^{RL} D_t^\alpha f(t)](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} g^{(k)}(0), \quad (7)$$

onde $g(t) = I_{0+}^{n-\alpha} f(t)$. Se $f(t)$ é contínua, então $g^{(k)}(0) = 0$, e o somatório é nulo.

A Transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo é dada por:

$$\mathcal{L}[{}_0^C D_t^\alpha f(t)](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0). \quad (8)$$

A Transformada de Laplace para da função $t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^\rho(\lambda t^\alpha)$, com $t \in [0, \infty]$, é dada por:

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^\rho(\lambda t^\alpha)](s) = s^{-\beta} (1 - as^{-\alpha})^{-\rho}, \quad \text{onde } |as^{-\alpha}| < 1. \quad (9)$$

3 O Modelo de Sel'kov

O modelo de Sel'kov [8], descreve oscilações nas concentrações de adenosina difosfato (ADP) e frutose-6-fosfato (F6P) durante a glicólise. Em sua forma adimensional, as equações são

$$\begin{cases} X' = -X + aY + bX^2Y & , X(0) = X_0 \\ Y' = V - aY - bX^2Y & , Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad (10)$$

onde X e Y representam as concentrações de ADP e F6P, $a > 0$, $b > 0$, $V > 0$ são parâmetros cinéticos e com condições iniciais $X_0 > 0$ e $Y_0 > 0$. O ponto crítico é

$$X_e = V \quad \text{e} \quad Y_e = \frac{V}{a + bV^2}.$$

3.1 Modelo de Sel'kov em Derivada de Caputo

No artigo [6], o autor propôs uma generalização do sistema dinâmico de Sel'kov em derivada fracionária de Caputo para incluir efeitos de hereditariedade(memoria), onde o sistema "lembra" influências passadas ao longo do tempo.

$$\begin{cases} {}^C D^{\alpha_1} (X) = -X + aY + bX^2Y & , X(0) = X_0 \\ {}^C D^{\alpha_2} (Y) = V - aY - bX^2Y & , Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad (11)$$

onde ${}^C D^{\alpha_i} [y(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_i)} \int_0^x \frac{y'(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha_i}} d\tau$ e $\Gamma(.)$ função Gama, é a derivada de Caputo de ordem $\alpha_i \in (0, 1]$, $i \in \{1, 2\}$ e o parâmetro positivo $\sigma_{1,2}$ tem a dimensão do tempo.

Observe que os valores dos pontos críticos nos modelos (10) e (11) são os mesmos independente dos parâmetros $\alpha_{1,2}$ e $\sigma_{1,2}$. Nos resultados numéricos usaremos $\sigma_{1,2} = 1$.

4 Modelo de Sel'kov em Derivada de Riemann-Liouville

A proposta de apresentar o modelo de Sel'kov em derivadas fracionária, se baseia em definir um operador fracionário a partir de uma EDO, com o objetivo de obter as equações diferenciais fracionárias de forma construtiva como proposto em [4] e [5]. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = -ry(t) + g(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \iff y(t) = \int_0^t e^{-r(t-\tau)} g(\tau) d\tau + y_0 e^{-rt} \quad (12)$$

Neste caso, chamamos a função $f(t) = e^{-rt}$ de núcleo da EDO, ver [4]. Gostaríamos de estudar o que aconteceria com a equação se o seu núcleo fosse alterado. Mais especificamente, gostaríamos de encontrar uma função para a qual pudéssemos escrever uma Equação Diferencial Fracionária. Com esse objetivo, definimos o núcleo como sendo $K(t) = e^{-r_1 t} E_\alpha(-r_2^\alpha t^\alpha)$, com $r_1 + r_2 = 1$. Desta forma, obtemos:

$$y(t) = \int_0^t e^{-r_1(t-\tau)} E_\alpha(-r_2^\alpha(t-\tau)^\alpha) g(\tau) d\tau + y_0 e^{-r_1 t} E_\alpha(-r_2^\alpha t^\alpha) \quad (13)$$

A partir da expressão (13), utilizamos as propriedades da função de Mittag-Leffler e a transformada de Laplace para obter a equação (14). Maiores detalhes podem ser encontrados em [5].

$$y'(t) = g(t) - r_1 y(t) - r_2^\alpha e^{-r_1 t} {}^{RL} D^{1-\alpha} [e^{r_1 t} y(t)] \quad (14)$$

A ideia de utilizar derivadas fracionárias em modelos é bastante comum, e em grande parte dos casos isso ocorre substituindo a derivada clássica por uma de ordem não inteira. Nesta construção podemos criar modelos fracionários apenas usando funções núcleos diferentes. Agora vamos para nosso modelo de Sel'kov em derivadas fracionárias utilizando esta técnica.

$$\begin{cases} X' = & -r_1 X + aY + bX^2Y & -r_2^{\alpha_1} e^{-r_1 t} D^{1-\alpha_1}(e^{r_1 t} X) \\ Y' = & V & -a_1 Y - bX^2Y & -a_2^{\alpha_2} e^{-a_1 t} D^{1-\alpha_2}(e^{a_1 t} Y) \end{cases} \quad (15)$$

onde $D^{1-\alpha_i} [.]$, é a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem $1-\alpha_i \in [0, 1]$, $i \in \{1, 2\}$, com $r_1 + r_2 = 1$, $\theta_1 + \theta_2 = 1$, $a_1 = a\theta_1$, $a_2 = a\theta_2$ e $0 < r_1, r_2, \theta_1, \theta_2 < 1$. Para o Modelo (15) o equilíbrio assintótico $\lim_{t \rightarrow +\infty} (X(t), Y(t)) = (X_e, Y_e)$ é obtido usando $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\lambda t} D^{1-\alpha_2}(e^{\lambda t} X) = \lambda^{1-\alpha} X_e$, ver [5]. Assim podemos obter o polinômio cúbico $P(X_e)$, e sua raiz real será o ponto de equilíbrio X_e ($r = r_1 + r_2^{\alpha_1} r_1^{1-\alpha_1}$ e $\theta = \theta_1 + \theta_2^{\alpha_2} \theta_1^{1-\alpha_2}$).

$$P(X_e) = X_e^3 - \frac{V}{r} X_e^2 + \frac{a\theta}{b} X_e - \frac{Va}{r} = X_e^2(X_e - \frac{V}{r}) + \frac{a\theta}{b}(X_e - \frac{V}{r\theta}) \quad \text{e} \quad Y_e = \frac{V}{a\theta + bX_e^2},$$

observe que $P(\frac{V}{r}) = \frac{aV}{br}(\theta - 1)$ e $P(\frac{V}{r\theta}) = \frac{V^3}{r^3\theta^3}(1 - \theta)$ segue $P(\frac{V}{r})P(\frac{V}{r\theta}) = -\frac{V^4}{r^4b\theta}(1 - \theta)^2 < 0$.

Portanto, temos sempre uma raiz real entre os valores $\frac{V}{r}$ e $\frac{V}{r\theta}$. Observe que para $\theta = 1$ e $r = 1$ o valor do equilíbrio dos três Modelos são os mesmos e isto ocorre para os casos das ordens, $\alpha_{1,2} = 1$ das derivadas fracionárias caso trivial, ou quando $r_1 = r_2 = \theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{2}$ e neste caso vale para qualquer valor de $\alpha_{1,2} \in (0, 1)$. Não faremos um estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio, mas apresentaremos a matriz jacobina associada aos três modelos. Para (10) e (11) temos:

$$J = \begin{pmatrix} -1 + 2bX_e Y_e & a + bX_e^2 \\ -2bX_e Y_e & -(a + bX_e^2) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J_C = \begin{pmatrix} -\sigma_1 + 2\sigma_1 bX_e Y_e & \sigma_1(a + bX_e^2) \\ -2\sigma_2 bX_e Y_e & -\sigma_2(a + bX_e^2) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

onde $\sigma_1 = \sigma_1^{1-\alpha_1}$ e $\sigma_2 = \sigma_2^{1-\alpha_2}$. Nas simulações usaremos $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ como feito em [6], e neste caso temos que as matrizes jacobianas dos modelos (10) e (11) são iguais, $J = J_C$. Agora, para obter a parte linear do modelo (15) vamos fazer a seguinte mudança $X = \bar{X} + X_e$ e $Y = \bar{Y} + Y_e$, no modelo (15).

$$\begin{cases} (\bar{X} + X_e)' = -r_1(\bar{X} + X_e) + a(\bar{Y} + Y_e) + b(\bar{X} + X_e)^2(\bar{Y} + Y_e) - r_2^{\alpha_1} e^{-r_1 t} D^{1-\alpha_1}(e^{r_1 t}(\bar{X} + X_e)) \\ (\bar{Y} + Y_e)' = V - a_1(\bar{Y} + Y_e) - b(\bar{X} + X_e)^2(\bar{Y} + Y_e) - a_2^{\alpha_2} e^{-a_1 t} D^{1-\alpha_2}(e^{a_1 t}(\bar{Y} + Y_e)) \end{cases}$$

e assim obtemos

$$\begin{cases} \bar{X}' = (-r_1 + 2bX_e Y_e)\bar{X} + (a + bX_e^2)\bar{Y} + F(\bar{X}, \bar{Y}) - r_2^{\alpha_1} e^{-r_1 t} D^{1-\alpha_1}(e^{r_1 t}\bar{X}) + f_1(t) \\ \bar{Y}' = -2bX_e Y_e \bar{X} - (a_1 + bX_e^2)\bar{Y} - F(\bar{X}, \bar{Y}) - a_2^{\alpha_2} e^{-a_1 t} D^{1-\alpha_2}(e^{a_1 t}\bar{Y}) + f_2(t) \end{cases}$$

onde o termo não linear é $F(\bar{X}, \bar{Y}) = b\bar{X}^2\bar{Y} + 2b\bar{X}\bar{Y}X_e + b\bar{X}^2Y_e$ e das relações do ponto de equilíbrio assintótico do modelo (15), temos as seguintes funções: $f_1(t) = X_e(r_2^{\alpha_1} r_1^{1-\alpha_1} - r_2^{\alpha_1} e^{-r_1 t} D^{1-\alpha_1}(e^{r_1 t}))$ e $f_2(t) = Y_e(a_2^{\alpha_2} a_1^{1-\alpha_2} - a_2^{\alpha_2} e^{-a_1 t} D^{1-\alpha_2}(e^{a_1 t}))$. Por tanto a parte linear de (15) é dado por

$$J_{RL} = \begin{pmatrix} -r_1 + 2bX_e Y_e & a + bX_e^2 \\ -2bX_e Y_e & -(a_1 + bX_e^2) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Observe que o modelo (15) não é autônomo e para obter as funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ basta fazer:

$$\begin{aligned}
e^{-r_1 t} RL D^{1-\alpha} [e^{r_1 t}] &= \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L} [e^{-r_1 t} RL D^{1-\alpha} [e^{r_1 t}]] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(s+r_1)}{s(s+r_1)^\alpha} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1 + \frac{r_1}{s}}{(s+r_1)^\alpha} \right] \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+r_1)^\alpha} + r_1 \frac{1}{s} \frac{1}{(s+r_1)^\alpha} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+r_1)^\alpha} \right] + r_1 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \frac{1}{(s+r_1)^\alpha} \right] \\
&= \mathcal{L}^{-1} \left[\mathcal{L} \left[e^{-r_1 t} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] \right] + r_1 \mathcal{L}^{-1} \left[\mathcal{L} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} e^{-r_1 \tau} d\tau \right] \right] \\
&= e^{-r_1 t} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{r_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} e^{-r_1 \tau} d\tau = e^{-r_1 t} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{r_1}{\Gamma(\alpha)} \gamma(\alpha, t) = h(\alpha, t).
\end{aligned}$$

No artigo de Zacher [9] e Luchko [2], temos uma descrição desta função $h(\alpha, t)$ e suas propriedades aplicado ao cálculo fracionário. Passando para as funções

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= X_e [r_2^{\alpha_1} r_1^{1-\alpha_1} - r_2^{\alpha_1} (e^{-r_1 t} \frac{t^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} + \frac{r_1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t \tau^{\alpha_1-1} e^{-r_1 \tau} d\tau)] \\
f_2(t) &= Y_e [a_2^{\alpha_2} a_1^{1-\alpha_2} - a_2^{\alpha_2} (e^{-a_1 t} \frac{t^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} + \frac{a_1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^t \tau^{\alpha_2-1} e^{-a_1 \tau} d\tau)],
\end{aligned}$$

destacamos aqui a seguinte propriedade

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_1(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f_2(t) = 0.$$

Esta técnica de fracionarizar o modelo (10), como foi descrita aqui, de forma bem simples e direta pode ser vista com mais detalhes nos artigos [4] e [5]. Para um estudo da estabilidade do modelo (15) um caminho a ser tomado, seria adaptar as contas feitas em [3].

5 Simulação Numérica

Na simulações utilizaremos o esquema L1 numérico para discretizar os modelos (11) e (15). Nas duas discretizações quando $\alpha_{1,2} = 1$ temos a discretização para o caso clássico (10), diferenças finitas. O intervalo de tempo $[0, T]$ é discretizado como $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, onde os passos de tempo $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, para $i \in \{0, \dots, n-1\}$, têm o mesmo tamanho $\Delta t = 0.01$ e $T = 200$. Considerando os valores de $\alpha_i, r_i, \theta_i \in (0, 1]$ com $i \in 1, 2$ e os valores dos parâmetros, a, b e V , todos serão indicados nos gráficos.

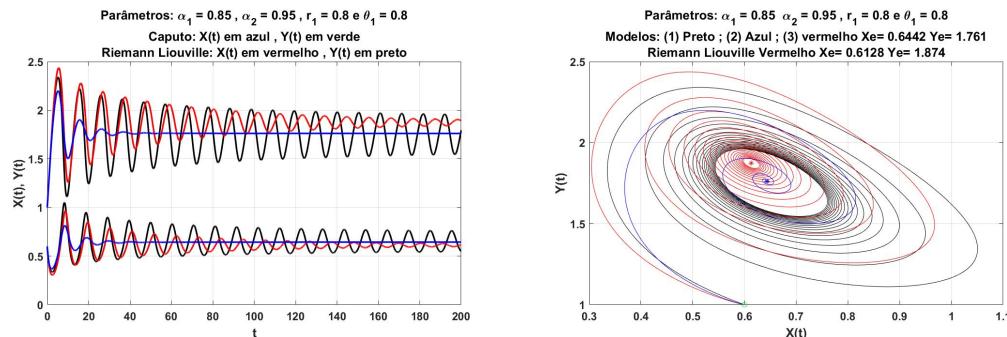


Figura 1: Valores de $a = 0.116$, $b = 0.602$ e $V = 0.64421$. Fonte: Autor.

Na Figura 1-(a), vemos as oscilações das soluções porem como podemos verificar no caso do modelo (11) as oscilações diminuem rapidamente o que indica o não aparecimento de ciclos limites, enquanto no modelo (15) elas são sustentadas por mais tempo. Já na Figura 1-(b) temos o plano de fase e podemos ver que pontos de equilíbrio são diferentes e vemos o ciclo limite para o caso do modelo (10).

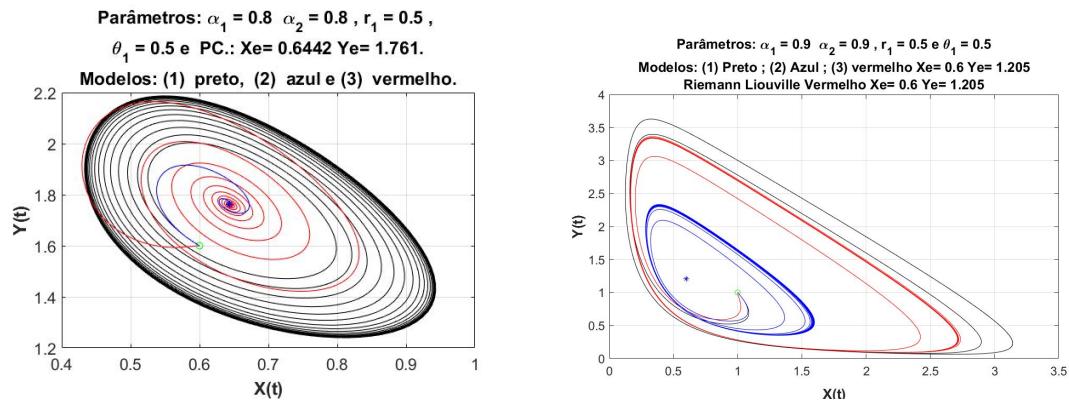


Figura 2: Valores de $a = 0.03$, $b = 1.3$ e $V = 0.6$. Fonte: Autor.

Na Figura 2-(a), temos o plano de fase das soluções dos três modelos, onde em preto é o caso clássico modelo (10) e aparece o ciclo limite já para os modelos (11) e (15) não temos mais os ciclos limites, mas para todos os três modelos o ponto de equilíbrio é o mesmo. Na Figura 2-(b) temos o plano de fase para os três modelos e além de terem os mesmos pontos de equilíbrio nos três casos temos os ciclos limites.

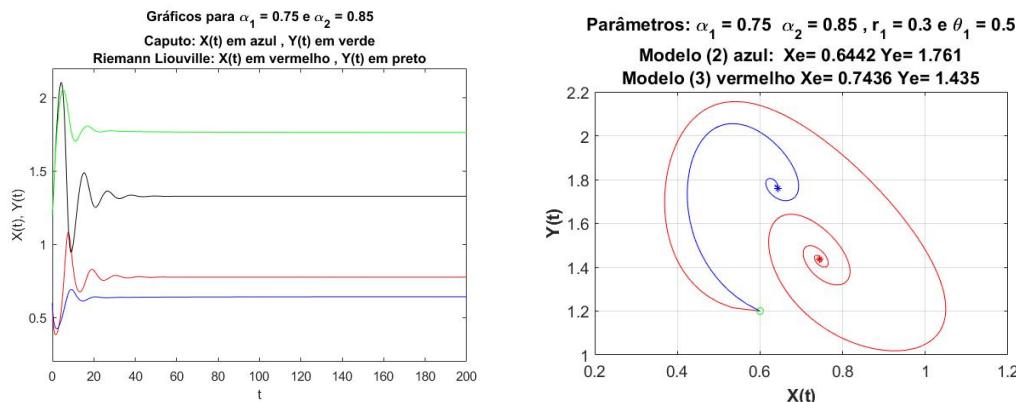


Figura 3: Valores de $a = 0.03$, $b = 1.3$ e $V = 0.6$. Fonte: Autor.

Na Figura 3-(a), temos as soluções dos modelos (11) e (15) onde vemos que em ambos os casos não aparece o regime oscilatório o que indica o não aparecimento do ciclo limite, como pode ser visto na Figura 3-(b) e ainda eles apresentam pontos de equilíbrio diferentes.

6 Conclusões Finais

Apresentamos uma forma alternativa para escrever o modelo de Sel'kov na forma fracionária. Está maneira nos levou ao operador de Riemann-Liouville e a um sistema não autônomo o que dificulta o estudo de estabilidade do ponto de equilíbrio. Mas pelas simulações verificamos, alguns casos, a presença de regimes regulares, caracterizados por ciclos limites estáveis no plano de fase, que indicam comportamentos auto-oscilatórios. Vimos também que estes regimes não era mantido quando tomávamos o modelo (11), enquanto para nosso modelo (15) ainda era mantido. O ponto de equilíbrio dos modelos (10) e (11) são os mesmos independente dos parâmetros $\alpha_{1,2}$ e $\sigma_{1,2}$ enquanto para o modelo (15) o ponto de equilíbrio depende fortemente dos parâmetros $\alpha_{1,2}$, r_1 e a_1 . Com esta pequena análise comparativa entre as três versões do modelo de Sel'kov, vimos que a utilização de derivadas fracionárias permite capturar comportamentos mais complexos e dependentes do histórico do sistema. A comparação numérica usando o método L1 fornece insights sobre como as diferentes formulações do modelo afetam a dinâmica das oscilações. Estamos confiante de que este modelo (15) merece um estudo mais aprofundado, entendemos que ele pode oferecer uma compreensão mais ampla da dinâmica do Modelo de Sel'kov. Assim, a modelagem fracionária sacrifica algumas propriedades convencionais, mas ganha poder descritivo em sistemas complexos.

Agradecimentos

Agradecemos à Pró-Reitoria de Pós-graduação e Pesquisa da Universidade Federal de Juiz de Fora e a Rede Mineira de Matemática (Projeto RED-00133-21).

Referências

- [1] R. F. Camargo e E. C. de Oliveira. **Cálculo Fracionário**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- [2] Y. Luchko. “Operational Calculus for the General Fractional Derivative and Its Applications”. Em: **Fractional Calculus and Applied Analysis** 24 (2021), pp. 338–375. DOI: <https://doi.org/10.1515/fca-2021-0016>.
- [3] N. Z. Monteiro, S. R. Mazorche e R. W. dos Santos. “Positivity and equilibrium in a fractional SIR model with Mittag-Leffler memory”. Em: **Trends in Computational and Applied Mathematics**. 25(1), e01789. 2024. DOI: <https://doi.org/10.5540/tcam.2024.025.e01789>.
- [4] N. Z. Monteiro, R. W. dos Santos e S. R. Mazorche. “Bridging the gap between models based on ordinary, delayed, and fractional differentials equations through integral kernels”. Em: **Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.** 19 (2024), pp. 1–11. DOI: [10.1073/pnas.2322424121](https://doi.org/10.1073/pnas.2322424121).
- [5] N. Z. Monteiro, R. W. dos Santos e S. R. Mazorche. “Constructive fractional models through Mittag-Leffler functions”. Em: **Computational and Applied Mathematics** 177 (2024), pp. 1–26. DOI: [10.1007/s40314-024-02680-z](https://doi.org/10.1007/s40314-024-02680-z).
- [6] R. I. Parovik. “Studies of the Fractional Sel'kov Dynamical System for Describing the Self-Oscillatory Regime of Microseisms”. Em: **Mathematics** (2022). DOI: [10.3390/math10224208](https://doi.org/10.3390/math10224208).
- [7] I. Podlubny. **Fractional Differential Equations**. San Diego: Elsevier, 1999.
- [8] E. E. Sel'kov. “Self-Oscillations in Glycolysis 1. A Simple Kinetic Model”. Em: **European Journal of Biochemistry** (1968). DOI: [10.1111/j.1432-1033.1968.tb00175.x](https://doi.org/10.1111/j.1432-1033.1968.tb00175.x).
- [9] R. Zacher. “Boundedness of weak solutions to evolutionary partial integro-differential equations with discontinuous coefficients”. Em: **Journal of Mathematical Analysis and Applications** (2008). 348(1), pp. 137–149. DOI: [10.1016/j.jmaa.2008.06.054](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.06.054).