Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Uma Abordagem Computacional do Contorno* de Grafos

Alonso L. S. de Oliveira† **Danilo Artigas**
Instituto de Ciência e Tecnologia,
Universidade Federal Fluminense,
28895-532, Rio das Ostras, RJ
E-mail: alonsoleonardo@id.uff.br, daniloartigas@puro.uff.br

RESUMO

Neste trabalho consideramos um problema relacionado a convexidade geodésica em grafos. O conceito de convexidade em estruturas discretas foi estendido a partir do conceito para matemática contínua.

Os grafos adotados são finitos, simples e conexos. Seja G um grafo, denotamos seu conjunto de vértices por $V(G)$ e o conjunto de arestas por $E(G)$, onde n é o número de vértices de G e m é o número de arestas de G. O *intervalo fechado* $I[S]$ de um conjunto $S \subseteq V(G)$ é o conjunto de todos os vértices que se encontram em algum caminho mínimo entre pares de vértices de S, incluindo os vértices em S. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *geodésico* se $I[S] = V(G)$. A *distância* $d(v,w)$ entre dois vértices $v,w \in V(G)$ é o número de arestas no caminho mínimo entre v e w. A *excentricidade* $ecc(v)$ de um vértice v é o máximo de $d(v,w)$ para todo vértice $w \in V(G)$. O *diâmetro* $diam(G)$ de G é máximo $ecc(v)$ para todo vértice $v \in V(G)$. O *contorno* $Ct(G)$ de G é o conjunto dos vértices cuja excentricidade é maior ou igual que a de seus vizinhos.

Neste trabalho consideramos o problema de determinar se o conjunto de contorno de um grafo é geodésico. Este problema foi definido em [3], onde os autores apresentaram o grafo G_1 da Figura 1, observe que $Ct(G_1) = \{a,b,c\}$ e $I[Ct(G_1)] = V(G) \setminus \{d\}$, logo $Ct(G_1)$ não é um conjunto geodésico. Além disso, provaram que o contorno dos grafos pertencentes a classe distância hereditária é geodésico. Em [2], os autores apresentaram o grafo G_4 da Figura 1, que é obtido estendendo-se o grafo G_1, e analogamente a G_1 temos que $Ct(G_4) = \{a,b,c\}$ e $I[Ct(G_4)] = V(G) \setminus \{d\}$. Ainda mais, G_4 é um grafo de permutação. Por fim, provaram que para todo grafo cordal o contorno é geodésico e apresentaram um esquema de classes de grafos classificadas em 3 tipos: classes onde todo grafo possui o contorno geodésico; classes onde nem todo grafo possui o contorno geodésico; e classes em aberto, onde a resposta não era conhecida. Em [1], todos as classes mencionadas como em aberto em [2] receberam respostas definitivas e, além disso, os autores apresentaram um novo grafo cujo contorno não é geodésico.

Os 3 artigos mencionados no parágrafo anterior apresentaram, em 8 anos, apenas 3 grafos diferentes tais que o contorno não é geodésico. A dificuldade de obtenção desses exemplos se deve, primeiramente, porque tais grafos não são comuns, mas principalmente pelo grande trabalho necessário para calcular manualmente as excentricidades dos vértices de G, determinar $Ct(G)$ e verificar se $Ct(G)$ é geodésico. Esta dificuldade torna a abordagem computacional promissora para análise do problema, e este é o foco deste trabalho.

Dado um grafo G, o algoritmo implementado para verificar se $Ct(G)$ é geodésico consiste em: calcular a excentricidade de cada vértice de G, aplicando n vezes o algoritmo de busca em largura; determinar para cada vértice $v \in V(G)$ se $v \in Ct(G)$, comparando a excentricidade de v com a de seus vizinhos; e testar se $I[Ct(G)] = V(G)$, verificando para cada vértice $v \in V(G)$ se existe $x,y \in Ct(G)$ tal que v se encontra em um caminho mínimo entre x e y. O algoritmo descrito tem complexidade

*Parcialmente financiado por Proppi/PDI/UFF
†bolsista de Iniciação Científica PIBIC/UFF

 © 2015 SBMAC

$O(n^3)$, nossa ideia central é analisar conjuntos de grafos, com alguma propriedade específica, e verificar se neste conjunto existem grafos cujo contorno não é geodésico. Por exemplo, verificar se existe um grafo $Ct(G)$ de 10 vértices tal que $I[Ct(G)] \neq V(G)$. No entanto, o número total de grafos não isomorfos de 10 vértices é muito grande, portanto acrescentamos alguns testes ao algoritmo para melhorar seu desempenho. Alguns desses testes foram extraídos de [1], onde os autores provaram que o contorno de um grafo G qualquer é geodésico se $diam(G) \leq 4$ ou $diam(G) \leq 7$ para um grafo G bipartido. Além disso, desenvolvemos o resultado a seguir.

Teorema 1. *Seja G um grafo e $S \subseteq V(G)$ um conjunto tal que $Ct(G) \subseteq S$ e $|S| \geq V - 3$, então S é geodésico.*

Como consequência do Teorema 1, se $|Ct(G)| \geq V - 3$, então $Ct(G)$ é geodésico. Adicionando este teste e aqueles mencionados no parágrafo anterior obtemos o algoritmo que utilizamos para a obtenção dos resultados computacionais deste trabalho. Inicialmente, consideramos grafos com um número limitado de vértices e, testando todos os casos, descobrimos um limite inferior para o número de vértices de grafos cujo contorno não é geodésico.

Teorema 2. *Se $n \leq 9$, então $Ct(G)$ é geodésico.*

Também verificamos quantos grafos de 10 vértices não possuem o contorno geodésico. E identificamos quais são estes grafos.

Teorema 3. *Existem 4 grafos com 10 vértices cujo contorno não é geodésico. Estes grafos são os da Figura 1.*

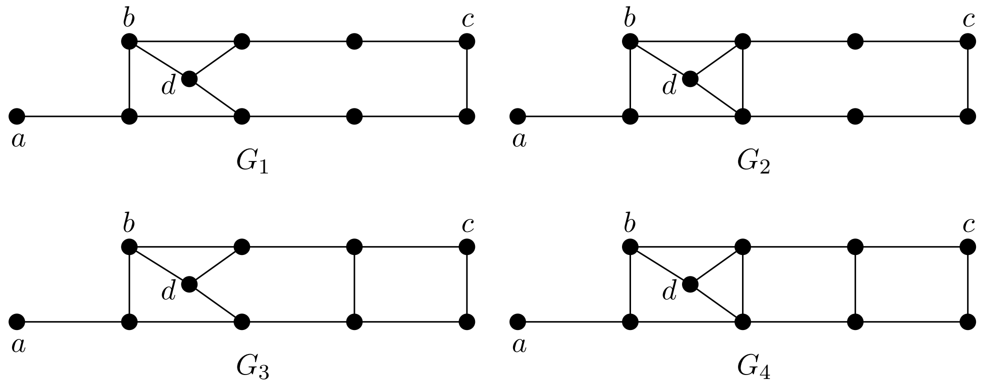

Figura 1: Menores grafos cujo contorno não é geodésico. Em ambos os grafos G_i, $Ct(G_i) = \{a, b, c\}$ e $I[Ct(G_i)] = V(G_i) \setminus \{d\}$, para $1 \leq i \leq 4$

Observamos que, para todo grafo G_i na Figura 1, o vértice d é o único vértice de G_i que não pertence a $I[Ct(G_i)]$. Dessa forma, utilizando os Teoremas 1 e 3, obtemos o Corolário 4, que é uma contribuição inicial para o problema proposto em [3], que permanece em aberto, se existe um grafo G tal que $I[I[Ct(G)]] \neq V(G)$.

Corolário 4. *Se $n \leq 10$, então $I[Ct(G)]$ é geodésico.*

Palavras-chave: *Teoria dos Grafos, Convexidade em Grafos, Análise de Algoritmos*

Referências

[1] D. Artigas, S. Dantas, M.C. Dourado, J.L. Szwarcfiter, and S. Yamaguchi. On the contour of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 161:1356–1362, 2013.

[2] J. Cáceres, C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, M. L. Puertas, and C. Seara. Geodeticity of the contour of chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 156:1132–1142, 2008.

[3] J. Cáceres, A. Márquez, O. R. Oellermann, and M. L. Puertas. Rebuilding convex sets in graphs. *Discrete Mathematics*, 297:26–37, 2005.

 © 2015 SBMAC