Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O GeoGebra como Ferramenta para o Estudo de Singularidades

Marco A. A. Nascimento[1] Jaqueline M. da Silva[2]
ICET/UFVJM, Teófilo Otoni, MG

Este trabalho busca apresentar um estudo sobre singularidades com o auxílio da plataforma GeoGebra para representação em simulação computacional cartesiana junto a funções cujo comportamento se altera nas proximidades da singularidade, de modo a construir uma melhor compreensão das singularidades para a solução de Equações Diferenciais.

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) constituem ferramentas eficientes para a resolução de problemas nas áreas da Física e da Engenharia, como na Mecânica Quântica e na análise de estruturas, respectivamente. Nesse sentido, um estudo que viabilize a compreensão de soluções de EDOs é de extrema importância. Para complementar o estudo proposto neste texto, propõe-se o GeoGebra, um software voltado para o ensino de Matemática, marcado pela sua funcionalidade, permitindo dinamismo e visualização das construções matemáticas [3].

Neste trabalho, o GeoGebra é utilizado como um recurso de simulação computacional, de forma interativa para o estudo de soluções em um estudo de caso de uma EDO de 2ª ordem em torno de pontos singulares regulares. Considere uma EDO de 2ª ordem na forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ funções contínuas em algum intervalo de x. Diz-se que um ponto x_0 é singular se as funções $p(x)$ e $q(x)$ não forem analíticas em x_0. Sejam os produtos das funções $p(x)$ e $q(x)$ pelos fatores $(x - x_0)$ e $(x - x_0)^2$, respectivamente, funções analíticas. Então o ponto singular é regular, como indicado por [1].

O método de resolução utilizado é o Método de Frobenius, uma generalização da solução por Séries de Potências. Ele permite encontrar soluções mesmo quando há um ponto singular regular, usando uma série abaixo, que inclui um fator adicional $(x - x_0)^r$, tal como aponta [1]:

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{2}$$

Para este caso existem duas raízes r_1 e r_2, que irão gerar as duas soluções (($y_1(x)$ e $y_2(x)$) quando substituídas na Equação 1. A solução geral será dada pela combinação linear das duas soluções, se essas forem linearmente independentes, Equação (3) ou passarão por uma Redução de Ordem Equação (4), se forem linearmente dependentes:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad x > 0. \tag{3}$$

$$y_2(x) = a y_1(x) \ln|x| + x^{r_2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right). \tag{4}$$

[1]marco.nascimento@ufvjm.edu.br
[2]jaqueline.silva@ufvjm.edu.br

A singularidade representa o ponto em que regras habituais podem não ser mais válidas. Para as EDOs, as singularidades estão localizadas nos pontos singulares, mas singularidades podem ocorrer até mesmo em funções de uma única variável.

Utilizando o GeoGebra, é possível comparar o comportamento de uma função que apresenta a singularidade com outras que não possuem, além de proporcionar a visualização do fenômeno da singularidade. Como exemplo, apresenta-se a simulação computacional da singularidade da função $y = \frac{\sqrt{x}}{x}$. O ponto A, quando $x = 0$, possui uma particularidade quanto ao comportamento da função, denominada singularidade. Em comparação, as funções x^2 e e^x não apresentam singularidade, como pode ser observado no comportamento das curvas quando $x \to 0^+$, como mostra a Figura 1, cuja simulação pode ser encontrada em [2].

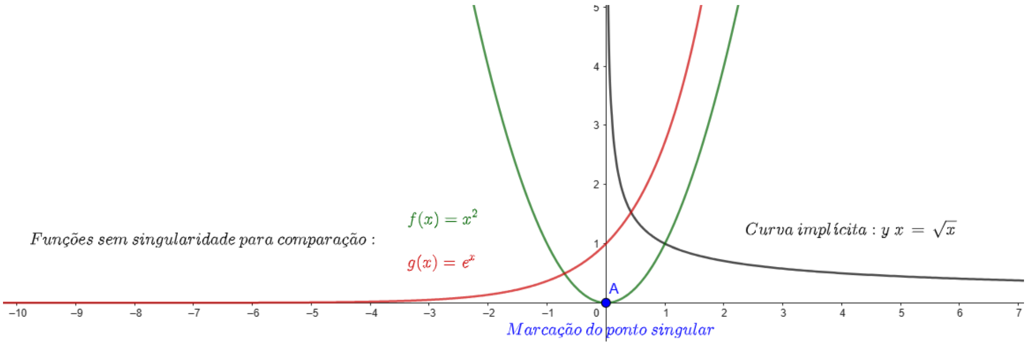

Figura 1: Funções com e sem singularidades. Fonte: Figura do Autor.

Com este estudo pode-se concluir que a resolução de EDOs com o auxílio do GeoGebra proporciona uma perspectiva visualmente mais dinâmica sobre a teoria, com uma poderosa visualização geométrica, proporcionando uma melhor compreensão sobre singularidades. Como perspectiva para trabalhos futuros, pode-se expandir o campo de estudo a EDOs de ordens maiores, bem como simular computacionalmente outros exemplos que complementem os estudos sobre pontos singulares. Assim, espera-se promover maior dinamismo no estudo das Equações Diferenciais e suas aplicações.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPEMIG pelo apoio financeiro para participar deste evento.

Referências

[1] R. C. Boyce W. E.; Diprima. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** 8a. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2006. ISBN: 9788521614999.

[2] M. A. A. Nascimento. **Pontos Singulares Regulares e Solução em Série**. Online. Acessado em 24/01/2025, `https://www.geogebra.org/classic/rmudwzcq`.

[3] J. M. da Silva, J. B. de Souza e A. Castelluber. "GeoGebra, um facilitador para o ensino de funções". Em: **Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo** 13.3 (2024), pp. 169–186. DOI: `10.23925/2237-9657.2024.v13i3p169-186`.