Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Recorrências com Dominós

Leonardo B. da Silva[1] Gilcélia R. de Souza[2]
UFSJ/CAP, Ouro Branco, MG

Este trabalho faz parte da dissertação de mestrado em Matemática Profmat do egresso Leonardo da Silva, cujo tema principal são as recorrências no ensino básico. Recorrência é uma relação que permite calcular um termo qualquer de uma sequência numérica em função de termos anteriores.

Uma sequência numérica definida por recorrência possui uma lei de formação e um ponto de partida, que são os primeiros números da sequência. Na dissertação [2], mostramos como as recorrências podem ser integradas a outros tópicos já conhecidos da matemática, proporcionando uma abordagem enriquecedora para resolver problemas algébricos e geométricos. Também discutimos algumas aplicações na Matemática Financeira e em diversos problemas, como a sequência dos pentágonos inscritos, o Problema da Pizza de Steiner e as sequências presentes no Triângulo de Pascal.

Aqui, apresentamos um exemplo interessante que foi aplicado em sala de aula. O ponto de partida foi uma pergunta simples: *De quantas maneiras diferentes podemos cobrir um tabuleiro $2 \times n$, utilizando peças de um dominó?*

O objetivo é determinar de quantas formas podemos cobrir um tabuleiro no formato $2 \times n$ com peças de dominós. Supondo que tenhamos um número suficiente de peças de dominó para cobri-lo.

Inicialmente, fizemos com os alunos alguns desenhos de tabuleiros:

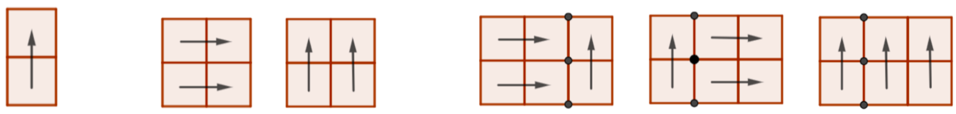

Figura 1: Tabuleiro 2×1 (1 maneira de cobrir o tabuleiro). Tabuleiro 2×2 (2 maneiras diferentes de cobrir o tabuleiro). Tabuleiro 2×3 (3 maneiras diferentes de cobrir o tabuleiro). Fonte: Autores.

Antes de desenhar o tabuleiro 2×4, a resposta mais comum foi que existem 4 maneiras diferentes de cobri-lo. No entanto, ao esboçar o tabuleiro 2×4, visualizamos 5 maneiras de cobrir o tabuleiro. Analogamente, visualizamos 8 maneiras de cobrir o tabuleiro 2×5 e 13 maneiras de cobrir o tabuleiro 2×6. Registramos os primeiros resultados em uma tabela e pedimos aos alunos que identificassem uma relação de recorrência para prever os próximos valores.

Tabela 1: Maneiras de cobrir um tabuleiro de dominó.

Tabuleiros	2×1	2×2	2×3	2×4	2×5	2×6	2×7	2×8	...
Maneiras de cobrir	1	2	3	5	8	13	?	?	...

A sequência que vemos na tabela é a sequência de Fibonacci, onde termo a partir do terceiro é a soma dos dois termos anteriores, portanto trata-se de uma recorrência de segunda ordem, como explicado em [1]. Mesmo identificando a sequência de Fibonacci, o problema ainda não está

[1]leonardo.bueno@educacao.mg.gov.br
[2]gilcelia@ufsj.edu.br

resolvido, devemos elaborar a lei de formação e chegar à fórmula fechada que permitirá calcular diretamente o número de maneiras de cobrir um tabuleiro 2 x n, para qualquer valor de n, ou seja, para qualquer tamanho de tabuleiro formado por 2 linhas e n colunas. Nesse problema consideramos os termos iniciais (1 e 2) e não (1 e 1) como de costume. Após o estudo inicial desse problema, podemos oferecer aos alunos a seguinte estratégia para resolver o problema de forma recursiva, que trata-se de como inicia a posição da primeira ou das duas primeiras peças: No tabuleiro 2×1, a única peça de dominó está de pé. No tabuleiro 2×2, podemos cobri-lo com 2 peças deitadas ou 2 peças em pé. No tabuleiro 2×3, podemos começar a cobri-lo de duas maneiras: 1ª) Iniciando com 2 peças deitadas ou 2ª) Iniciando com 1 peça em pé. Iniciando com 2 peças deitadas, resta verificar como se deve preencher o restante do tabuleiro, que será 1 forma. Iniciando com 1 peça em pé, resta verificar como se deve preencher o restante do tabuleiro, que serão duas formas. Ao todo temos $1 + 2 = 3$ formas de preenchimento para o tabuleiro 2×3.

No tabuleiro 2×4, pensamos da mesma forma: Iniciando com 2 peças deitadas, resta verificar como se deve preencher o restante do tabuleiro, esse restante é justamente um tabuleiro 2×2, que já sabemos, existem 2 formas de preenchimento. Iniciando com 1 peça em pé, resta verificar como se deve preencher o restante do tabuleiro, esse restante é justamente um tabuleiro 2×3 e já sabemos, existem 3 formas de preenchimento. Portanto temos $2 + 3 = 5$ formas de preenchimento para o tabuleiro 2×4. Esse processo pode ser usado para todos os tabuleiros.

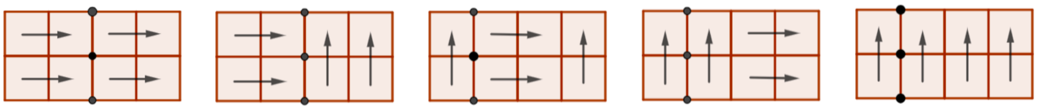

Figura 2: Para o tabuleiro 2×4, visualizamos 5 maneiras diferentes de cobrir o tabuleiro. Fonte: Autores.

Generalizando esse raciocínio, obtemos que o número de maneiras diferentes de cobrir um tabuleiro (2 por n) é igual ao número de maneiras de cobrir um tabuleiro (2 por $n - 1$) mais o número de maneiras de cobrir um tabuleiro (2 por $n - 2$). Sendo X_n o número de maneiras diferentes de cobrir um tabuleiro (2 por n), X_{n-1} o número de maneiras de cobrir um tabuleiro (2 por $n - 1$) e X_{n-2} o número de maneiras de cobrir um tabuleiro (2 por $n - 2$). Ou seja, a relação de recorrência é dada por: $X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$, com $X_1 = 1$ e $X_2 = 2$.

A resolução dessa recorrência pode ser vista em [2] e a fórmula fechada é

$$X_n = \frac{[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]}{\sqrt{5}} \tag{1}$$

Como exemplo, para o tabuleiro 2×5 ($n = 5$), temos:

$$X_5 = \frac{[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{5+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{5+1}]}{\sqrt{5}} = \frac{[((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2)^3 - ((\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2)^3]}{\sqrt{5}} = \frac{512\sqrt{5}}{64} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{512}{64} = 8 \text{ formas.}$$

Observe que, embora o cálculo através da fórmula fechada seja um pouco trabalhoso, ele sempre fornece um número inteiro positivo como resultado.

Referências

[1] A. C. Morgado e P. C. P. Carvalho. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015. ISBN: 9788583371953.

[2] L. B. Silva e Souza G. R. "Um Modo Fácil de Abordar Recorrências no Ensino Médio". Dissertação de mestrado. PROFMAT–UFSJ/CAP, 2024.