

Modelagem Computacional de Veículos Aeroespaciais Através de Métodos Numéricos Calibrados com Dados Experimentais

Davi G. Sellin¹ Fabricio S. Sousa²
ICMC/USP, São Carlos, SP

Com o objetivo de tornar a operação de veículos-foguete experimentais, construídos de forma amadora, mais confiável e credível, propomos o desenvolvimento de um algoritmo capaz de simular o comportamento, durante o voo, de um foguete de sondagem operando em baixa altitude e em regime subsônico. O algoritmo fornece previsões de trajetória e possíveis locais de queda, de modo a facilitar a recuperação tanto do veículo lançador quanto dos dados armazenados em seu computador de bordo.

A modelagem matemática do movimento de translação baseou-se na forma diferencial da Segunda Lei de Newton [3]. O modelo considera as principais forças atuantes no foguete, como peso, arrasto, empuxo e sustentação [4], desconsiderando, contudo, efeitos associados à dinâmica celeste da Terra, como a força de *Coriolis* e o efeito *J2* [1]. Tal modelo é acoplado às equações de Euler para a rotação de corpos rígidos, permitindo a caracterização de fenômenos oscilatórios [3]. Ademais, são adotados diferentes termos forçantes de acordo com os distintos regimes de voo do foguete (decolagem, fase propelida, *coasting* e queda livre). O modelo para a fase propelida, por exemplo, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} x''(t)m(t) &= (E(t) - b |\mathbf{v}(t)|) \cos(\alpha(t)) \cos(\varphi(t)), \\ y''(t)m(t) &= (E(t) - b |\mathbf{v}(t)|) \cos(\alpha(t)) \sin(\varphi(t)), \\ z''(t)m(t) &= (E(t) - b |\mathbf{v}(t)|) \sin(\alpha(t)) - m(t)g, \\ m''(t) &= -M^{ratio}, \\ c_g''(t) &= -C_g^{ratio}, \\ \alpha''(t) &= I_\alpha^{-1}(I_\gamma - I_\omega)\gamma'(t)\omega'(t) - m'(t)\alpha'(t)r_e^2 + \lambda_\alpha(t) + \tau_\alpha(t), \\ \gamma''(t) &= I_\gamma^{-1}(I_\alpha - I_\omega)\alpha'(t)\omega'(t) - m'(t)\gamma'(t)r_e^2 + \lambda_\gamma(t) + \tau_\gamma(t), \\ \omega''(t) &= I_\omega^{-1}(I_\alpha - I_\gamma)\alpha'(t)\gamma'(t), \end{aligned} \quad (1)$$

onde as variáveis de interesse são as coordenadas x, y, z , massa m , centro de gravidade c_g e ângulos de Euler α, γ, ω , todas funções do tempo. Na equação (1), b é a influência da força de arrasto dada por $b = \frac{\rho}{2} A_{ref} C_d$, $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ é a velocidade instantânea do projétil, $\varphi(t)$ é o ângulo azimutal de lançamento, e o termo forçante $\lambda(t)$ representa a ação da força de arrasto devido ao vento atmosférico \mathbf{w} , dada por

$$\lambda_\theta(t) = \frac{\rho}{2} A_{ref} |\mathbf{w}|^2 C_\ell + \frac{\rho}{2} A_{ref} |\mathbf{w}|^2 \theta(t) \sum_{j=1}^n C_\ell^j (C_p^j - c_g(t)), \quad (2)$$

onde $\theta \in \{\alpha, \gamma\}$ é o ângulo de Euler sendo afetado por esta força. Ainda, para fechar as equações, é necessário conhecer diversos parâmetros: curva de força de empuxo $E(t)$, momentos de inércia I_α ,

¹sellin_ifsc@usp.br

²f.s.sousa@usp.br

I_ω e I_γ , taxa de consumo de combustível M^{ratio} , taxa de amortecimento do centro de gravidade C_g^{ratio} , densidade ρ , distância do bocal até o centro de gravidade r_e , área de referência A_{ref} , coeficiente de arrasto C_d , coeficientes de sustentação total C_ℓ e com relação a cada componente $j \in \{\text{cone, aletas, cauda}\}$ do foguete C_ℓ^j , centros de pressão total C_p e com relação a cada componente C_p^j , além do vetor velocidade do vento atmosférico \mathbf{w} .

Neste trabalho, propomos a ação de uma nova força, denominada *força de resistência ao movimento*, denotada por τ , de natureza empírica, atuante sobre o centro de pressão e responsável por causar certa resistência no alinhamento da trajetória com a direção de escoamento das rajadas de vento incidentes. Tal força é modelada por

$$\tau_\theta = -\frac{\rho}{2} A_{ref} |\mathbf{v}|^2 C_\ell |C_p^j - c_g(t)| \sin(\theta(t) - \theta_{ref}) + \frac{\rho}{2} A_{ref} |\mathbf{v}| \theta'(t) \sum_{j=1}^n C_\ell^j (C_p^j - c_g(t))^2, \quad (3)$$

onde $\theta \in \{\alpha, \gamma\}$ é o ângulo de Euler sendo afetado por esta força.

Os parâmetros de performance do foguete no modelo são obtidos através de calibração experimental, através de dados coletados de sensores acoplados em bancada de teste. Os parâmetros ambientais são obtidos acessando informações climáticas e geográficas.

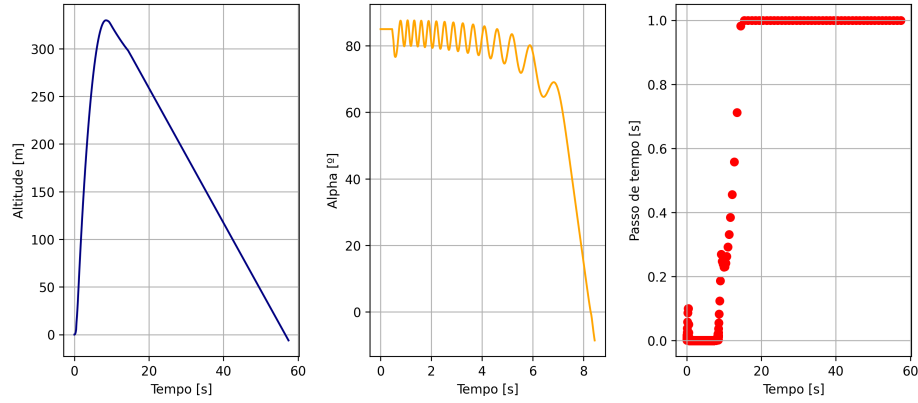


Figura 1: Resultados da altitude (esquerda), o ângulo de Euler *pitch* α (centro), e a evolução do passo de tempo adaptativo (direita) durante a simulação numérica. Fonte: Elaborada pelo autor.

O modelo foi resolvido numericamente por meio da aplicação do método numérico de **Runge-Kutta-Fehlberg** [2], empregando passos de tempo tanto fixos quanto adaptativos. Os resultados foram comparados com curvas reais de sensores embarcados de foguetes experimentais lançados em 2023 e 2024, com boa concordância entre os resultados.

Referências

- [1] O. Montenbruck; E. Gill. **Satellite Orbits: Models, Methods, and Applications**. Berlin: Springer, 2000. ISBN: 9783540672807.
- [2] R. J. LeVeque. **Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN: 9780898717839.
- [3] S. T. Thornton; J. B. Marion. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. Belmont, CA: Brooks/Cole–Thomson Learning, 2004. ISBN: 9780534408961.
- [4] P. A. Tipler; G. Mosca. **Physics for Scientists and Engineers**. New York: W. H. Freeman e Company, 2008. ISBN: 9781429217453.