Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Máquina de Turing Estendida como um Sistema Dinâmico

Phellype X. Oliveira[1] Pouya Mehdipour[2]
UFV, Viçosa, MG

O estudo das máquinas de Turing sob a perspectiva da *dinâmica topológica* e da *dinâmica simbólica* oferece uma ferramenta teórica útil para a compreensão da complexidade computacional e da dinâmica de sistemas discretos. A codificação das configurações de uma máquina de Turing em espaços simbólicos – tipicamente como pontos em um espaço métrico compacto, como $A^{\mathbb{Z}}$ ou $Q \times A^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ – possibilita analisar o comportamento global da máquina como um sistema dinâmico. Nesse contexto, a máquina de Turing induz uma transformação, cujas propriedades dinâmicas (como expansividade, recorrência, sensibilidade a condição inicial e entropia) refletem as características da lógica computacional da máquina.

Uma das conexões mais significativas nesse sentido é quando se relaciona com os *shifts* de tipo finito (SFTs) – uma classe de sistemas dinâmicos simbólicos caracterizados por restrições locais sobre os padrões permitidos. Os SFTs são conhecidos por seu comportamento dinâmico rico e são frequentemente utilizados para modelar máquinas de Turing e outros sistemas computacionais.

Este projeto de IC é baseado em um estudo da dinâmica topológica de máquinas de Turing em direção ao artigo [2] e visa estender a máquina de Turing clássica para uma versão bifuncional – que seja capaz de executar duas funções correlacionadas simultaneamente – e estudar as propriedades da dinâmica topológica de tais máquinas estendidas. Um dos resultados principais de [2] afirma que, se uma máquina de Turing for expansiva, então ela é topologicamente conjugada a um SFT. Como a máquina de Turing estendida é baseada no espaço simbólico zip shift [3], que representa extensões do shift bilateral de contexto bijetivo para localmente bijetivo, então no teorema principal deste trabalho pretende-se demonstrar que, sob a condição de S-expansividade – expansividade bilateral para dinâmicas localmente bijetivas – uma máquina de Turing estendida é topologicamente conjugada à dinâmica simbólica zip shift.

Mais precisamente, nesse trabalho, apresentamos a máquina de Turing com fita móvel (MTT) como um sistema dinâmico e mostramos que tais máquinas são dinâmicas localmente bijetivas e finitas-por-1. Além disso, como objetivo final desse projeto, buscamos mostrar que as MTT estendidas com duas cabeças fixas são sistemas dinâmicos S-expansivos topologicamente conjugados com a dinâmica simbólica estendida zip shift.

Definição 1. *Um **sistema dinâmico** é uma função $f : X \to X$ no mínimo contínua definida em um espaço métrico (compacto).*

Definição 2 ([2])**.** *Um sistema dinâmico $f : X \to X$ é dito **localmente bijetivo** se, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U de x na qual f é bijetiva.*

Definição 3 ([2])**.** *Um sistema dinâmico é dito **finito-por-1** se existe $k > 0$ tal que, para todo x, $\#(f^{-1}(x)) \leq k$, onde $\#$ representa a cardinalidade desse conjunto.*

Exemplo 1 ([3])**.** *Sejam Z e S dois conjuntos finitos de símbolos, com $\#Z \leq \#S$, e considere uma função sobrejetora $\tau : S \to Z$. Defina o espaço **zip shift** como $\Sigma := Z^{\mathbb{Z}^-} \times S^{\mathbb{Z}^+}$, e considere*

[1]phellype.oliveira@ufv.br
[2]pouya@ufv.br

a aplicação $\sigma_\tau : \Sigma \to \Sigma$ definida por

$$[\sigma_\tau(x)]_i = \begin{cases} x_{i+1}, & \textit{se } i \neq -1, \\ \tau(x_0), & \textit{se } i = -1. \end{cases}$$

*A aplicação σ_τ define um sistema dinâmico finito-por-1, denominado **zip shift**.*

Definição 4. *Um sistema dinâmico finito-por-1 $f : X \to X$ definido em um espaço métrico (X, d) é dito **S-expansivo** se existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in X$, existe $k \in \mathbb{Z}$ com $d(f^k x, f^k y) > \delta$. Para $k > 0$, é considerado $f^{-k}(x) := [f^k(x)]^{-1}$. Caso f seja bijetiva, diremos que o sistema é **expansivo**.*

Para definirmos uma máquina de Turing com fita móvel (MTT), consideraremos um conjunto finito Q, não vazio, de estados internos e um conjunto A, também finito, de símbolos com pelo menos dois elementos, de modo que $Q \cap A = \emptyset$.

Definição 5 ([2])**.** *Seja $\delta : Q \times A \to Q \times A \times \{-1, 0, 1\}$ uma função de transição. Uma MTT é um sistema dinâmico $f : X \to X$ onde $X = Q \times A^{\mathbb{Z}}$ e f é definida como*

$$f(x)_q = \delta_Q \pi(x), \tag{1}$$

$$f(x)_i = \delta_A \pi(x) \quad \text{se} \;\; i = -\delta_Z \pi(x), \tag{2}$$

$$f(x)_i = x_{i+\delta_Z \pi(x)} \quad \text{se} \;\; i \neq -\delta_Z \pi(x) \tag{3}$$

Proposição 1 ([2])**.** *Toda MTT é localmente bijetiva e finita-por-1.*

Proposição 2. *Toda MTT estendida construída em um espaço zip shift é localmente bijetiva e finita-por-1.*

Teorema 1 ([2])**.** *Toda MTT expansiva é topologicamente conjugada com um SFT.*

Teorema 2. *Toda MTT estendida S-expansiva construída em um espaço zip shift é topologicamente conjugada com um zip shift do tipo finito.*

Demonstração. A ideia principal da prova deste teorema é mostrar que as MTT estendidas têm a propriedade de sombreamento [1] bilateral. □

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq e à FAPEMIG pelo apoio financeiro ao projeto e participação no evento.

Referências

[1] A. T. Baraviera e F. M. Branco. **Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão**. Online. Acessado em 19/01/2025, `https://www.emis.de/journals/em/docs/coloquios/SU-2.02.pdf`.

[2] P. Kůrka. "On topological dynamics of Turing machines". Em: **Theoretical Computer Science** 174 (1997), pp. 203–216. DOI: `10.1016/s0304-3975(96)00025-4`.

[3] S. Lamei e P. Mehdipour. "Zip Shift Space". Em: **arXiv preprint arXiv:2502.11272** (2025). URL: `https://arxiv.org/abs/2502.11272`.