Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O Número de Bronze não tem Razão

Marcelo O. Veloso[1]
UFSJ, Ouro Branco, MG
Jonilson S. Oliveira[2]
SEDUC/PMC, Contagem, MG

Em 1997, no artigo [4], a autora define a família dos **Números Metálicos**, cujos primeiros elementos recebem nomes de metais, como o número de ouro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o número de prata $1+\sqrt{2}$, o **número de bronze** $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$, o número de cobre 2, o número de níquel $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, entre outros. Esses números pertencem ao conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - px - q = 0 \text{ e } x > 0 \text{ onde } p, q \in \mathbb{Z}_+^*\}.$$

Neste trabalho, parte integrante da dissertação de mestrado do PROFMAT [3], o principal objetivo foi estudar os números metálicos e suas relações com outros temas da matemática . Além disso, pretende-se proporcionar ao professor do ensino básico uma abordagem lúdica para introduzir e trabalhar equações do segundo grau em sala de aula, bem como explorar transversalmente diversos conteúdos do final do ensino fundamental e do primeiro ano do ensino médio.

O primeiro número metálico, e certamente o mais conhecido, é a **razão áurea**. Essa razão foi definida por Euclides como uma proporção derivada da divisão de um segmento de forma específica [1]. O número

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

foi chamado por ele de "razão extrema e média". A razão áurea é obtida ao dividir um segmento de modo que satisfaça a seguinte proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}. \tag{1}$$

Figura 1: Razão Áurea. Fonte: Autores.

Os números de ouro, prata e cobre podem ser expressos como a razão entre a diagonal e o lado de um polígono regular. Por exemplo, o número de ouro é a razão entre a medida da segunda diagonal e a primeira diagonal (lado) de um pentágono regular.

[1]veloso@ufsj.edu.br
[2]jonilson23@hotmail.com

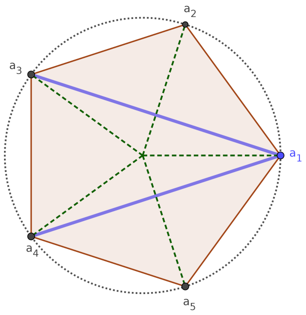

Figura 2: Pentágono. Fonte: Autores.

De forma análoga, os números de prata e de cobre também podem ser obtidos como razões no octógono e no hexágono regulares, respectivamente.

Uma questão natural que surge é verificar se esse mesmo fenômeno ocorre com os outros números metálicos. Ou seja, será que todos os números metálicos podem ser obtidos como a razão entre a diagonal e o lado de algum polígono regular? O próximo número na lista é o número de bronze, $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Curiosamente, ele **não pode** ser expresso como a razão entre uma diagonal e o lado de qualquer polígono regular.

Teorema. *Não existe polígono regular tal que o número de bronze seja a razão entre uma de suas diagonais e o seu lado.*

Demonstração. Veja Teorema 6.1 na disssertação de mestrado [3]. □

Esse resultado aparece pela primeira vez no artigo [2]. Neste trabalho, os autores reformulam a demonstração do teorema com maior rigor matemático, suprindo algumas lacunas presentes na prova original.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES pelo apoio financeiro, à SBM e à coordenação nacional do PROFMAT por tornarem possível a realização deste trabalho.

Referências

[1] I. Bicudo et al. **Os Elementos**. São Paulo: Unesp, 2009. ISBN: 978-8571399358.

[2] A. R. Buitrago. "Polygons, diagonals, and the bronze mean". Em: **Nexus Network Journal** 2 (2007), pp. 321–326. DOI: `10.1007/s00004-007-0046-x`.

[3] J. S. Oliveira. "Um breve estudo sobre os Números Metálicos". Dissertação de mestrado. UFSJ, 2019. URL: `https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat_cap/JONILSON_DOS_SANTOS_OLIVEIRA.pdf`.

[4] V. W. de Spinadel. "La familia de números metálicos". Em: **Cuadernos del CIMBAGE** 6 (2003), pp. 17–44. URL: `https://www.redalyc.org/pdf/462/46200602.pdf`.

