Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Intepretações Combinatórias para os Números de Jacobsthal e Jacobsthal-Lucas Generalizados via Ladrilhamentos

Elen V. P. Silva, Cecília P. Andrade, Kenia C. P. Silva

UNICAMP- Departamento de Matemática Aplicada

Campinas

E-mail: elenvps@gmail.com, cpandrade@gmail.com, keycpsilva@gmail.com

Resumo: *Neste trabalho vamos apresentar novas interpretações combinatórias utilizando ladrilhamentos, [1, 3, 2], para identidades que envolvem os números de Jacobsthal e Jacobsthal-Lucas, [5, 4].*

Palavras-chave: *Números de Jacobsthal Generalizados, Números de Jacobsthal-Lucas Generalizados, Ladrilhamento, Intepretação Combinatória*

1 Definições

O ***n*-ésimo número de Jacobsthal** é definido por

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3},$$

generalizando obtemos os números da forma

$$J_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s+1},$$

onde $n \geq 0$ é um número natural e $s \geq 0$ é um número real. Ainda podemos definí-los pela relação de recorrência

$$J_0^s = 0, J_1^s = 1, J_n^s = (s-1)J_{n-1}^s + sJ_{n-2}^s,\ n \geq 2.$$

O ***n*-ésimo número de Jacobsthal-Lucas** é definido por

$$j_n = 2^n + (-1)^n,$$

generalizando obtemos os números da forma

$$j_n^s = s^n + (-1)^n,$$

onde $n \geq 0$ é um número natural e $s \geq 0$ é um número real. Ainda podemos definí-los pela relação de recorrência

$$j_0^s = 2, j_1^s = s-1, j_n^s = (s-1)j_{n-1}^s + sj_{n-2}^s,\ n \geq 2.$$

2 Interpretações

Considere a_n^s o $n-$ladrilhamento de ordem $1 \times n$ com quadrados de $s-1$ cores distintas e dominós de s cores distintas. Podemos definir $a_n^s = J_{n+1}^s$, para $n \geq 0$, uma vez que $a_0^s = J_1^s = 1$, equivalente ao ladrilhamento vazio; $a_1^s = J_2^s = s-1$, correspondente aos quadrados de $s-1$ cores distintas, $a_2^s = J_3^s = s^2 - s + 1$, correspondente a dominós de s cores distintas adicionado a (s-1)(s-1) correspondente ao 2-ladrilhamento formado por dois quadrados; e assim por diante.

O primeiro resultado abaixo segue da generalização da identidade (1.7) em [4] :

$$J_n^s = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-r}{r} s^r (s-1)^{n-1-2r} \tag{1}$$

Teorema 1. *Para $n \geq 0$, segue que*

$$a_n^s = \sum_{r \geq 0} \binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r}.$$

Demonstração: No lado esquerdo da igualdade temos o ladrilhamento de tamanho n. Consideremos agora o número de ladrilhamentos de tamanho n com exatamente r dominós. Então, esses ladrilhamentos tem $n-2r$ quadrados, onde cada um pode ser de $s-1$ cores diferentes. Portanto $n-2r+r = n-r$ posições a serem preenchidas e assim temos $\begin{pmatrix} n-r \\ r \end{pmatrix}$ maneiras de escolher em qual posição fica os dominós e s^r maneiras de escolha da sua cor. Desta forma, existem $\binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r}$ ladrilhamentos com exatamente r dominós. (Observermos que r não ultrapassa o valor de $\lfloor n/2 \rfloor$.) Somando em r obtemos o resultado desejado.

□

Através da identidade

$$\sum_{k=2}^{n} J_k^s (s-1)^{n-k} = \frac{J_{(n+2)}^s - (s-1)^{n-1}(s^2-s+1)}{s} \tag{2}$$

fazendo $k = k-1$ e $n = n+1$ segue que

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0221

$$\sum_{k=1}^{n} J_{k+1}^{s}(s-1)^{n-k} = \frac{J_{(n+3)}^{s} - (s-1)^{n}(s^{2}-s+1)}{s} \tag{3}$$

ou ainda,

$$\sum_{k=1}^{n} J_{k+1}^{s}(s-1)^{n-k} = \frac{J_{(n+3)}^{s} - (s-1)^{n+2} - s(s-1)^{n}}{s} \tag{4}$$

Mas temos para $k=0$, $s\sum_{k=0}^{0} J_{k+1}^{s}(s-1)^{n-k} = s(s-1)^{n}$
e, portanto, temos o seguinte resultado.

Teorema 2. *Para todo* $n \geq 0$,

$$s\sum_{k=0}^{n} a_{k}^{s}(s-1)^{n-k} = a_{n+2}^{s} - (s-1)^{n+2} \tag{5}$$

Demonstração: O lado direito da igualdade (5) é o número de (n+2)-ladrilhamentos com quadrados de $s-1$ cores distintas e dominós de s cores distintas, excluindo o ladrilhamento contendo apenas quadrados .

Considere agora a localização do último dominó. Existem $s(s-1)^{n-k}a_{k}^{s}$ ladrilhamentos onde o último dominó cobre as células $k+1$ e $k+2$, uma vez que as células de 1 a k são ladrilhadas de a_{k}^{s} maneiras, as células $k+1$ e $k+2$ são cobertas por um dominó de uma das s cores disponíveis, e as células de $k+3$ até $n+2$ são cobertas por quadrados de $(s-1)^{n-k}$ maneiras. Portanto, o número de ladrilhamentos com pelo menos um dominó é $s(s-1)^{n-k}a_{0}^{s} + s(s-1)^{n-k}a_{1}^{s} + ... + s(s-1)^{n-k}a_{n}$, ou equivalentemente $s\sum_{k=0}^{n} a_{k}^{s}(s-1)^{n-k}$.

□

Teorema 3. *Para todo* $n \geq 0$,

$$a_{m}^{s}a_{n+1}^{s} + s a_{n}^{s}a_{m-1}^{s} = a_{m+n+1}^{s} \tag{6}$$

Demonstração: O lado direito da igualdade (6) é o número de (m+n+1)-ladrilhamentos.

Consideremos agora as condições de decomposição de um ladrilhamento. Se um $(m+n+1)-$ ladrilhamento é *separável* na célula m, então podemos criar um m-ladrilhamento seguido de um $(n+1)-$ladrilhamento. Existem $a_{m}^{s}a_{n+1}^{s}$ números de termos um $(m+n+1)-$ladrilhamento *separável* na célula m.

Caso contrário, existirá um dominó cobrindo a células m e $m+1$. Então podemos criar um $(m-1)-$ladrilhamento seguido de um dominó e um $(n)-$ladrilhamento. Isso pode ser feito de $s a_{n}^{s}a_{m-1}^{s}$ maneiras. Desde que, não é possível um ladrilhamento ser *separável* e *não separável* na célula m, simultaneamente, existem $a_{m}^{s}a_{n+1}^{s} + s a_{n}^{s}a_{m-1}^{s}$ ladrilhamentos de tamanho $(m+n+1)$.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0221

□

Corolário 4. *Para todo* $n \geq 0$, a_n^s *divide* $\sum_{i=0}^{n} s^{n-i} a_{2i}^s$.

Teorema 5. *Para todo* $n \geq 1$,

$$(a_n^s)^2 = a_{n+1}^s a_{n-1}^s + (-1)^n s^n \tag{7}$$

Demonstração: Temos $(a_n^s)^2$ ladrilhamentos para um par de n-ladrilhamentos. Também temos $a_{n+1}^s a_{n-1}^s$ ladrilhamentos para um $(n+1)-$ladrilhamento e um $(n-1)-$ladrilhamento (colocados um sobre o outro). Vamos dividir a prova em dois casos dependendo da paridade de n. Se n é ímpar, então existe pelo menos um quadrado nos dois ladrilhos e portanto o par de n-ladrilhamentos contém uma falha e consequentemente um cauda. Portanto, trocando as caudas do ladrilhamento obtemos um $(n+1)-$ladrilhamento e um $(n-1)-$ladrilhamento com as mesmas falhas. Essa correspondência é biunívoca entre todos os pares de n-ladrilhamentos contendo falhas e todos os pares de $(n+1)-$ladrilhamento e $(n-1)-$ladrilhamento . No entanto devemos descontar os pares de $(n+1)-$ladrilhamento e $(n-1)-$ladrilhamento contendo apenas dominós, pois estes não contém falhas. Ou ainda, devemos descontar os $s^{\left\{\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}\right\}} = s^n$ ladrilhamentos formados apenas por dominós de s cores distintas. Logo temos $(a_n^s)^2 = a_{n+1}^s a_{n-1}^s - s^n$.

Quando n é par, aplicamos o mesmo argumento anterior para obter uma correspondência biunívoca entre todos os pares de $n-$ ladrilhamentos e todos os pares de $(n+1)-$ladrilhamento e $(n-1)-$ladrilhamento contendo falhas. Nesse caso, o ladrilhamento contendo apenas dominós é o único ladrilhamento de um par de $n-$ladrilhamentos sem falhas. Logo temos que descontar os s^n ladrilhos de $(a_n^s)^2$. Assim temos $(a_n^s)^2 - s^n = a_{n+1}^s a_{n-1}^s$, o que completa a prova.

□

Agora vamos dar uma interpretação combinatória para os números j_n^s de Jacobsthal-Lucas Generalizado. Para tanto defina j_n como a quantidade de braceletes com n posições rotuladas no sentido horário, usando quadrados de $(s-1)$ cores e dominós"curvos"de s cores distintas.

Lema 6. *Para todo* $n \geq 1$,

$$j_n^s = a_n^s + s a_{n-2}^s. \tag{8}$$

Demonstração: Existem j_n^s n-braceletes e estes são de dois tipos: *em fase ou fora de fase*. Dado um n-bracelete *em fase*, podemos "esticá-lo"em um n-ladrilhamento, logo existem a_n^s n-braceletes *em fase*. Para o caso de um bracelete *fora de fase*, podemos remover o dominó que cobre as cèlulas n e 1 e portanto obtemos um ladrilhamento de comprimento $n-2$. Portanto, como existem s possibilidades de cores para este dominó, o número de n-braceletes fora de fase é $s a_{n-2}^s$, e portanto segue o resultado.

□

Teorema 7. *Para todo* $n \geq 1$

$$j_n^s = \sum_{r \geq 0} \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r}. \tag{9}$$

Demonstração: Do lado esquerdo da igualdade (9) temos braceletes de tamanho n. Por outro lado, considere braceletes com exatamente r dominós. Com a mesma argumentação do lema (6) temos que existem $\binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r}$ braceletes *em fase* e $\binom{n-r-1}{r-1} s^r (s-1)^{n-2r}$ braceletes *fora de fase*. Uma vez que

$$\binom{n-r-1}{r-1} s^r (s-1)^{n-2r} = \frac{r}{n-r} \binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r},$$

temos, somando em r, que o número de braceletes de tamanho n é dado por

$$\sum_{r \geq 0} \left[\binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r} + \frac{r}{n-r} \binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r} \right] =$$

$$\sum_{r \geq 0} \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r}$$

como desejado.

□

Teorema 8. *Para todo* $n \geq 0$,

$$(s+1)^2 a_n^s = j_{n+2}^s + s j_n^s \tag{10}$$

Demonstração: Considere S_1 o conjunto contendo $(s+1)^2$ cópias de cada $n-$ladrilhamento e S_2 o conjunto formado pelos $(n+2)-$ braceletes ou duas cópias de cada $n-$ bracelete. Temos que $|S_1| = (s+1)^2 a_n$ e $|S_2| = j_{n+2} + 2j_n$. Para provar essa identidade vamos estabeler 1-9 correspondência entre os conjuntos S_1 e S_2.

Dado um $n-$ladrilhamento podemos criar naturalmente 4 tipos de braceletes:

1.A quantidade de $(s-1)(s-1)$ $(n+2)-$ braceletes *em fase* terminados em dois quadrados inseridos;

2.A quantidade de s $(n+2)-$ braceletes *em fase* terminados em um dominó inserido;

3.A quantidade de s $(n+2)-$ braceletes *fora de fase* com um dominó inserido nas células $(n+2, 1)$;

4. $(n)-$bracelete *em fase* concatenando as células n e 1.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0221

Ainda estão faltando dois tipos de braceletes: $(n)-$braceletes *fora de fase* e $(n+2)-$braceletes *em fase* terminados em quadrado com um dominó inserido cobrindo o par de célula $(n, n+1)$. Note que a construção de tais braceletes depende do $n-$ladrilhamento tomado.

Se o $n-$ladrilhamento termina em quadrado então criamos um $(n+2)-$ bracelete *em fase* terminado em quadrado inserindo um dominó cobrindo o par de célula $(n, n+1)$. Teremos então s $(n+2)-$ braceletes desta forma.

Se o $n-$ladrilhamento termina em dominó então criamos um $(n)-$bracelete *fora de fase* rotacionando o bracelete em uma célula no sentido horário. Tomando s cópias deste bracelete teremos s cópias do $n-$ladrilhamento terminado em dominó, que adicionado as s cópias do $n-$ladrilhamento terminado em quadrado necessárias para fazer o $(n+2)-$ bracelete *em fase* terminado em quadrado resultam em s cópias de a_n.

No entanto, para termos o total de $n-$ braceletes, j_n, é necessário tomar s cópias do bracelete do tipo descrito no item 4. Assim, teríamos o total de $j^s_{n+2} + sj^s_n$ braceletes sendo levados bijetivamente a $(s-1)(s-1) + s + s + s + s = (s+1)^2$ cópias de cada $n-$ladrilhamento.

□

Utilizandos os mesmos argumentos demonstramos, via ladrilhamento, as seguintes identidades generalizadas encontradas a partir das identidades dadas em [4].

Teorema 9. *Para todo* $n \geq 0$,

$$s\sum_{i=0}^{n} j^s_i (s-1)^{n-k} = j^s_{n+2} - (s-1)^{n+2} \tag{11}$$

Teorema 10. *Para todo* $n \geq 0$,

$$j^s_{n+1} a^s_n = a^s_{2n+1} \tag{12}$$

Teorema 11. *Para todo* $n \geq 0$,

$$(s-1)a^s_{n-1} + j^s_n = 2a^s_n \tag{13}$$

Teorema 12. *Para todo* $n \geq 0$,

$$j^s_{2n+1} = (s-1)\sum_{i\geq 0} s^{n-i} j^s_{2i} \tag{14}$$

Teorema 13. *Para todo* $n, m \geq 0$,

$$j^s_m j^s_n + (s+1)^2 a^s_{m-1} a^s_{n-1} = 2j^s_{m+n} \tag{15}$$

Teorema 14. *Para todo* $n \geq 0$ *temos*

$$a_{n-1} + a_n = s^n \tag{16}$$

Teorema 15. *Para todo* $n \geq 0$,

$$a^s_{2n+1} = \sum_{i=0}^{n} (s-1)s^{n-i} a^s_{2i}. \tag{17}$$

Notemos que todas as identidades em [4] podem ser vistas como corolários das identidades generalizadas e portanto podem também ser demonstradas via ladrilhamento.

Referências

[1] Benjamin, A. T., Plott, S. S., Sellers, J.A. *Tiling Proofs of Recent Sum Identities Involving Pell Numbers* Annals of Combinatoric, 12(3), 271-278 (2008)

[2] Benjamim, A. T., Quinn, J. J. *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof.* The Dolciani Mathematical Expositions, 27, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2003.

[3] Briggs, K. S., Little, D. P., Sellers, J.A. *Combinatorial Proofs of Various q-Pell Identities via Tilings* Annals of Combinatoric, 14, 407-418 (2010)

[4] Horadam, A. F. *Jacobsthal Representation Numbers.* The Fibonacci Quarterly 34.1 (1996): 40-54.

[5] Sloane, N. J. A. *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences,* published eletronically at https://oeis.org/.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0221