Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo Comparativo entre o Método do Quociente de Rayleigh, Método da Potência e Aceleração de Aitken

Maria F. O. Silva[1], Kauembergy F. Diniz[2], João P. A. Carvalho[3], Raissa S. Ferreira[4], Ivan Mezzomo[5], Stefeson B. Melo[6], Matheus S. Menezes[7]
DCME/UFERSA, Mossoró, RN, DIMAP/UFRN, Natal, RN

A determinação dos autovalores de matrizes desempenha um papel fundamental em diversas áreas da matemática e nas engenharias. Os métodos numéricos mais utilizados para esse cálculo são o Método da Potência e a aceleração de Aitken, que são amplamente utilizados devido à sua eficiência. Nesse trabalho, vamos realizar um estudo comparativo entre três métodos numéricos utilizados para determinar autovalores e avaliar seus desempenhos com relação ao número de iterações e ao erro relativo. Serão utilizadas matrizes de diferentes tipos e ordem, a fim de analisar as vantagens e limitações de cada método na determinação do maior autovalor em módulo.

O Método do Quociente de Rayleigh (MQR) é considerado um método com um aprimoramento importante, utilizando uma abordagem relativamente simples para encontrar qualquer autovalor de uma matriz. De acordo com [1], dada uma matriz auto-adjunta A, com autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ e vetores v. O MQR dado por $\rho(v)$, é definido por:

$$\rho(v) \equiv \rho(u; A) \equiv \frac{v^c A v}{v^c v} \tag{1}$$

onde v^c é o complexo conjugado de v tal que $v \neq 0$. Note que todo vetor v possui um $\rho(v)$. Além disso, para todos os vetores v n-dimensionais diferentes de zero, $\rho(v)$ é limitado no intervalo $[\lambda_1, \lambda_n]$ entre o menor e o maior autovalor da matriz A.

O Método da Potência (MP) é um dos métodos numéricos mais utilizado para encontrar o autovalor dominante e seu respectivo autovetor de uma matriz, e é definido pelo teorema abaixo:

Teorema 1: *[2] Seja A uma matriz real de ordem n e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ seus autovalores e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ seus correspondentes autovetores. Suponha que os autovetores são linearmente independentes e que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Seja a sequência definida por $x_{k+1} = Ax_k$, com $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ onde x_0 é um vetor arbitrário que permite a expansão $x_0 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$, com β_j escalares quaisquer e $\beta_1 \neq 0$, então*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(x_{k+1})_r}{(x_k)_r} = \lambda_1, \tag{2}$$

onde o índice r indica a r-ésima componente. Além disso, quando $k \to \infty$, x_k tende ao autovetor correspondente a λ_1.

De acordo com [2], o Método de Aitken é usado para acelerar a convergência do MP através de uma sequência linearmente convergente, conforme o teorema a seguir:

Teorema 2: *[2] Suponha que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ seja uma sequência linearmente convergente com limite P. Para motivarmos a criação de uma sequência $\{P'_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge mais rapidamente para P*

[1] fsilva434445@hotmail.com
[2] kauembergy@gmail.com
[3] juneiras256@gmail.com
[4] raissa.ferreira@alunos.ufersa.edu.br
[5] imezzomo@ufersa.edu.br
[6] stefeson@ufersa.edu.br
[7] matheus.menezes@ufrn.br

© 2026 SBMAC

do que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$*, primeiro assumimos que as expressões* $P_n - P$*,* $P_{n+1} - P$ *e* $P_{n+2} - P$ *coincidam e que* n *é suficientemente grande, tal que* $P = P_n - \frac{(P_{n+1}-P_n)^2}{P_{n+2}-2P_{n+1}+P_n}$.

As matrizes utilizadas foram obtidas através do repositório Florida Sparse Matrix Collection, sendo todas elas simétricas. As implementações foram efetuadas em linguagem de programação Python versão 3.11.5, em uma máquina com processador Ryzen 5 7520u, 7ª geração, 8GB RAM e Sistema Operacional Windows 11. Como critério de parada foi usado o Erro Relativo (ER) ou 10.000 iterações, com precisão de 10^{-5}. Na tabela abaixo constam os resultados obtidos através de testes realizados.

Tabela 1: Resultados dos experimentos realizados

Matriz	**Método**	**Campo**	**Ordem**	**Iter**	**Autovalor**	**ER**
bcspwr01	MQR	pattern	39	4	3,36397489	$0,25548 \times 10^{-8}$
	MP			35	3,836138705	$9,93065 \times 10^{-6}$
	Aitken			20	3,836222654	$9,97267 \times 10^{-6}$
can_61	MQR	pattern	61	5	10,94670864	$1,59741 \times 10^{-6}$
	MP			13	10,94651817	$9,62959 \times 10^{-6}$
	Aitken			8	10,94651731	$9,43291 \times 10^{-6}$
dwt_59	MQR	pattern	59	4	4,557689341	$1,99977 \times 10^{-6}$
	MP			40	4,96616816	$9,17997 \times 10^{-6}$
	Aitken			21	4,966528162	$9,83444 \times 10^{-6}$
dwt_758	MQR	pattern	758	6	8,000374469	$5,95286 \times 10^{-6}$
	MP			78	8,718045534	$9,45805 \times 10^{-6}$
	Aitken			35	8,717784913	$6,17161 \times 10^{-6}$
bcsstm13	MQR	real	2003	7	4,792729217	$8,91283 \times 10^{-6}$
	MP			43	177,2629906	$8,41703 \times 10^{-6}$
	Aitken			22	177,2664225	$9,60609 \times 10^{-6}$

Ao analisarmos os resultados da tabela acima, observamos que o Método de Aitken se mostrou mais eficiente em relação ao número de iterações, com exceção da matriz can_61 em que o MQR foi mais eficiente em 37,5% em relação ao Método de Aitken e 61,5% em relação ao MP. Podemos notar também que, com exceção da matriz can_61, apesar do baixo número de iterações, o MQR não convergiu para o autovalor dominante das matrizes. Segundo [1], isso acontece devido ao fato de que o autovalor encontrado pelo MQR depende do vetor utilizado na primeira iteração, pois se aproxima do autovetor mais próximo deste vetor. Neste trabalho, utilizamos o vetor $(1, 1, \ldots, 1)$ para todas as matrizes e em todos os métodos, o que explica a grande diferença do autovalor encontrado pelo MQR, especialmente na matriz bcsstm13.

Podemos concluir que, de modo geral, a aceleração de Aitken é um método mais eficiente para encontrar o autovalor dominante de uma matriz e o MQR somente será indicado se o vetor inicial for próximo do autovetor desejado, pois o método pode encontrar qualquer autovalor da matriz.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da UFERSA na execução deste trabalho.

Referências

[1] A. B. Prieto. “Quociente de Rayleigh e Algoritmos Genéticos: estudo de caso para o cálculo de Autovalores de Matrizes Simétricas”. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Tecnologia, 2016.

[2] R. L. Burden e J. D. Faires. **Análise Numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

© 2026 SBMAC