Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aplicação do Método Shooting na Obtenção da Curva Elástica em uma Viga

Jeferson Kuhn Freiberger[1], Francisca Caroline Barbosa[2], Jocelaine Cargnelutti[3], Vanderlei Galina[4]
UTFPR, Toledo, PR

O estudo de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem é de grande relevância para a matemática, física e engenharia, devido à sua ampla aplicabilidade em problemas estudados nas áreas de mecânica dos fluidos, condução de calor, movimento ondulatório e fenômenos eletromagnéticos. Outro aspecto relevante é a sua estrutura, que pode ser considerada relativamente simples, pois não requer um grau elevado de complexidade matemática na sua resolução, além de contar com uma vasta fundamentação teórica já estabelecida [1].

Neste estudo, emprega-se o método Shooting (ou método do disparo) para a resolução de problemas de valor de contorno (PVCs) da forma,

$$y''(x) = f\left(x, y(x), y'(x)\right), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha \quad \text{e} \quad y(b) = \beta. \tag{1}$$

O método Shooting consiste em transformar um PVC em um sistema de problemas de valor inicial (PVIs) equivalente e, então supor inclinações para a trajetória da solução no ponto conhecido $(a,\, y(a))$. Em seguida, aplica-se uma técnica numérica para resolver o sistema de PVIs e determinar uma aproximação para o valor de $y(b)$ [3].

O problema abordado refere-se à equação diferencial básica da curva elástica para uma viga simplesmente apoiada e uniformemente carregada, considerando suas respectivas condições de contorno, tem-se o PVC,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{wLx}{2EI} - \dfrac{wx^2}{2EI} \quad x \in [0,\, L]\ . \\ y(0) = 0,\ y(L) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

onde E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia e w é a distribuição de carga. Foram considerados os valores, $E = 200\,\text{GPa}$, $I = 30.000\,\text{cm}^4$, $w = 15\,\text{kN/m}$ e $L = 3\,\text{m}$.

Na aplicação do método Shooting, o PVC em (2) é transformado no sistema de PVIs,

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{wLx}{2EI} - \dfrac{wx^2}{2EI} \qquad x \in [a,\, b] = [0,\, L]\ , \\ y(a) = 0,\ y'(a) = z_a \end{cases} \tag{3}$$

então foram feitos (por tentativa e erro) os disparos $z_{a1} = 0$ e $z_{a2} = -0,000005$, obtendo $y_{b1}(3) = 8,395103 \cdot 10^{-6}\, m$ e $y_{b2}(3) = -6,604897 \cdot 10^{-6}\, m$. A cada disparo, os PVIs foram resolvidos pelo

[1] jefer.kuhn03@gmail.com
[2] franciscabarbosa@alunos.utfpr.edu.br
[3] jocelainecargnelutti@gmail.com
[4] vanderleigalina@utfpr.edu.br

método de Runge-Kutta de quarta ordem considerando uma partição em $[0,\ L]$ de 200 subintervalos. Para os cálculos, utilizou-se a linguagem de programação Python.

Como a equação diferencial é linear, pode-se determinar a inclinação correta do disparo por interpolação linear, uma vez que a inclinação correta, z_a, está linearmente relacionada com os disparos errados (z_{a1}, y_{b1}) e (z_{a2}, y_{b2}) [2]

$$z_a = z_{a1} + \frac{z_{a2} - z_{a1}}{y_{b2} - y_{b1}}(0 - y_{b1}), \tag{4}$$

obtendo-se, $z_a = -2,798368 \cdot 10^{-6}$ e $y_b = 2,216844 \cdot 10^{-21} \approx 0$, isto é, $y(3) \approx 0$.

A Figura 1 mostra as soluções para os dois disparos realizados e para o disparo correto, o qual gera a curva de deflexão para a viga.

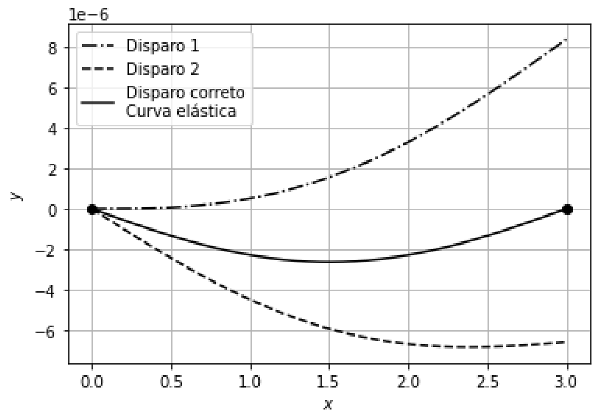

Figura 1: Soluções conforme disparos realizados. Fonte: dos autores.

Com os resultados obtidos, pode-se verificar, que a menos de erros de arredondamento, a solução numérica coincide com a solução analítica, dada por $y(x) = (2wLx^3 - wx^4 - wL^3x)/(24EI)$, $x \in [0,\ L]$.

Conclui-se que o método Shooting é uma ferramenta eficaz para resolver PVCs lineares de segunda ordem, como demonstrado no desenvolvimento da solução para a deflexão de uma viga uniformemente carregada. Por meio da aplicação do método de Runge-Kutta, foi possível alcançar uma solução precisa. Além disso, a utilização da linguagem Python possibilitou a rápida resolução dos PVIs a cada disparo, e também, a visualização dos resultados, destacando a importância de métodos numéricos e computacionais na resolução de problemas de engenharia.

Referências

[1] W. E. Boyce, R. C. Diprima e D. B. Meade. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 11a. ed. LTC, 2012.

[2] R. L. Burden e J. D. Faires. **Análise Numérica**. 8a. ed. Cengage Learning, 2008.

[3] S. C. Chapra e R. P. Canale. **Métodos Numéricos para Engenheiros**. 3a. ed. McGraw-Hill, 2013.