Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Distribuição de Temperatura em uma Haste por meio do Método Shooting Não Linear

Francisca C. Barbosa[1] Jeferson K. Freiberger[2] Jocelaine Cargnelutti[3] Vanderlei Galina[4]
UTFPR, Toledo, PR

Quando se trata de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), observa-se uma ampla aplicabilidade em problemas reais. No entanto, nem sempre é possível obter uma solução analítica, especialmente no caso de EDOs não lineares, nas quais a resolução analítica apresenta consideráveis dificuldades. Diante desse cenário, os métodos numéricos emergem como ferramentas essenciais, auxiliando na resolução desses problemas de forma eficiente [1].

As EDOs lineares de segunda ordem têm grande importância, por causa de suas aplicações à engenharia, mecânica e elétrica. Porém, a adição de termos para melhor descrever o sistema físico pode tornar a EDO linear em não linear. Uma EDO de segunda ordem é dita linear quando pode ser escrita na forma $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x)$, sendo linear em y e em suas derivadas, e as funções p, q e r são funções somente de x. Caso contrário, é dita não linear [3].

Neste estudo, realizou-se a resolução de um problema de valor de contorno (PVC), descrito por uma EDO de segunda ordem não linear da forma,

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta. \tag{1}$$

onde empregou-se o método Shooting (ou método do disparo), o qual consiste em reduzir o PVC em um sistema de problemas de valor inicial (PVIs) equivalente e, então, supor inclinações para a trajetória da solução no ponto inicial conhecido. Em seguida, aplica-se uma técnica numérica para resolver o sistema de PVIs e determinar uma aproximação para o valor de contorno. Em problemas não lineares, uma abordagem para alcançar o valor especificado no contorno é tratá-lo como um problema de raízes [2].

Considerou-se o modelo matemático que pode ser utilizado para calcular a temperatura em estado estacionário ao longo da dimensão axial de uma haste fina e longa com valores fixos para as temperaturas nas extremidades. A temperatura da haste aquecida $T(x)$ é determinada pelo PVC com EDO não linear,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dx^2} + \gamma(T_\infty - T) + \sigma(T_\infty^4 - T^4) = 0, \\ T(0) = 300\,\mathrm{K}, \qquad T(10) = 400\,\mathrm{K} \end{cases} x \in [0, 10]. \tag{2}$$

onde γ e σ são parâmetros de transferência de calor que refletem, respectivamente, os impactos relativos de convecção e condução, e radiação e condução; T_∞ é a temperatura do gás circundante. Os valores considerados são: $L = 10\,\mathrm{m}$, $\quad \gamma = 0,05\,\mathrm{m}^{-2}$, $\quad \sigma = 2.7 \times 10^{-9}\,\mathrm{K}^{-3}\mathrm{m}^{-2}$, $\quad T_\infty = 200\,\mathrm{K}$. [2]

[1]franciscabarbosa@alunos.utfpr.edu.br
[2]jefer.kuhn03@gmail.com
[3]jocelainecargnelutti@gmail.com
[4]vanderleigalina@utfpr.edu.br

Para aplicar o método Shooting, o PVC em (2) é transformado no seguinte sistema de PVIs:

$$\begin{cases} T'(x) = z, \\ z'(x) = -\gamma(T_\infty - T) - \sigma(T_\infty^4 - T^4) \qquad x \in [a,b] = [0,10]. \\ T(a) = 300, \qquad T'(a) = z_a \end{cases} \tag{3}$$

Em seguida, supõem-se valores arbitrários (disparos por tentativa e erro) para a inclinação desconhecida, z_a, da curva integral no ponto $(a, T(a))$, com o objetivo de determinar a condição de contorno $T(b) = T(10) = 400\,K$. Ao fazer os disparos $z_{a1} = -45$ e $z_{a2} = -42$, obteve-se $T_{b1}(10) = 120,297421$ e $T_{b2}(10) = 367,056888$. A cada disparo, os PVIs foram resolvidos pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. Obtidos os resíduos, $r_1 = z_{a1} - T_{b1}$ e $r_2 = z_{a2} - T_{b2}$, aplicou-se o método da secante, com tolerância de $1 \cdot 10^{-6}$ para a distância entre as duas últimas raízes encontradas, o qual resultou na inclinação $z_a = -41,743984$ e $T(10) = 399,999999 \approx 400$. Isto é, para o valor de z_a calculado, tem-se um resíduo próximo de zero. O código computacional foi escrito em linguagem Python. A Figura 1 mostra as soluções para os dois disparos realizados e para o disparo correto, o qual gera a curva de distribuição de temperatura na haste.

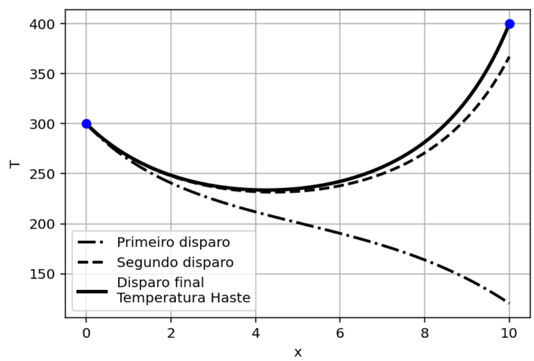

Figura 1: Soluções para os disparos realizados. Fonte: dos autores

A resolução do PVC proposto mostra que o método Shooting é uma técnica eficiente para resolução de PVCs de segunda ordem que são dados por uma EDO não linear, com valores de contorno conhecidos no intervalo de integração. O método se torna preciso pela utilização do método de Runge-Kutta de quarta ordem na resolução dos PVIs além de não haver a necessidade de resolução de sistemas lineares ou não lineares. Dessa forma, o método Shooting, aliado a uma linguagem de programação como o Python, se mostra muito útil na resolução de problemas como o proposto.

Referências

[1] W. E. Boyce, R. C. Diprima e D. B. Meade. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 12a. ed. LTC, 2004. ISBN: 9788521638834.

[2] S. C. Chapra e R. P. Canale. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 7a. ed. AMGH, 2016. ISBN: 9788580555691.

[3] E. Kreyszig. **Matemática Superior para Engenharia**. 9a. ed. Vol. 1. LTC, 2009. ISBN: 9788521616436.