

Solução numérica de uma classe de Equações Diferenciais Parciais Não-Lineares pelo Método dos Elementos Finitos

Carlos Eduardo V. Mota¹ Samuel A. Mota² Bruno A. Carmo³ Marcello G. Teixeira⁴
LC3/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Este presente trabalho visa definir, analisar e implementar soluções numéricas para uma classe de equações diferenciais parciais utilizando o método dos elementos finitos. A classe de equações diferenciais a ser resolvida é uma generalização da equação Benjamin-Bona-Mahony [1]

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \quad (1)$$

onde as variáveis subscritas representam uma derivação parcial da função em relação a esta variável. A equação de interesse neste estudo será a equação

$$\beta u_t + (g(u))_x - \alpha u_{xxt} = f \quad (2)$$

onde $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para recuperarmos a equação (1), tomamos $g(s) = \frac{s^2}{2} + s$, $f \equiv 0$, $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Neste trabalho a equação acima é analisada em apenas uma dimensão espacial e em um intervalo de tempo, ambos finitos. Ou seja, consideraremos $u(x, t) : \bar{\Omega} \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}$ e $f(x, t) : \bar{\Omega} \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}$, em que $T \in \mathbb{R}^+$ é o tempo final e $\bar{\Omega} = [0, X]$, $X \in \mathbb{R}^+$. Além disso, consideramos que é conhecida a solução no tempo inicial, que denotamos por u_0 , e que a função u é prescrita e homogênea nos limites do intervalo. Isto é, $u(x, 0) = u_0(x)$ e $u(0, t) = u(X, t) = 0$. Para obtermos a solução numérica para esta classe de equações em (2), sujeitas as restrições acima, seguimos os seguintes passos:

1. Escrever a equação (2) na sua forma fraca variacional.
2. Aproximar a solução por uma de base de dimensão finita.
3. Definir esta solução de forma matricial.
4. Escolher as funções de interpolação da base e a estratégia de integração numérica.
5. Implementar a montagem e resolução dos sistemas lineares resultantes.

No primeiro passo, utilizou-se a estratégia de multiplicar a equação (2) por uma função $v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e realizar uma integração parcial [2]. Em seguida, aplicou-se o Método de Crank-Nicolson Galerkin linearizado para a realização da discretização do tempo e do espaço. As escolhas neste passo foram tomadas visando a definição matricial do problema, que é construída através de manipulações da equação para sua estruturação em matrizes e vetores. Para a escolha de funções da base, foram tomados polinômios contínuos de grau 1 e suporte compacto, conhecidos como *hat functions*. Para a integração numérica, utiliza-se a Quadratura Gaussiana. Por fim, a implementação e resolução dos sistemas é feita utilizando Julia - uma linguagem recente, mas que tem se provado performática e munida de variadas ferramentas de suporte ao desenvolvimento de códigos para computação científica. Para a verificação da corretude do código

¹carlosevm@ic.ufrj.br

²motasm2611@gmail.com

³bruno.carmo@ppgi.ufrj.br

⁴marcellogt@ic.ufrj.br

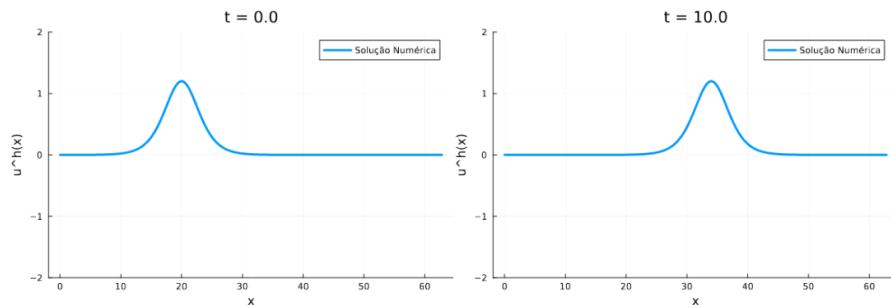


Figura 1: Solução numérica no tempo $t = 0.0$ e $t = 10.0$ para a equação (1), tomando $u_0 = 3(\nu - 1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu-1}{\nu}}(x - x_0)\right)$, com $\nu = 1.4$, $x_0 = 20$, $T = 20$ e $\bar{\Omega} = [0, 20\pi]$. Fonte: autoria própria.

desenvolvido, é feito um estudo de erro com uma equação que conhecemos a solução analítica. É possível observar uma convergência quadrática do erro para diversos testes, que é o resultado teórico esperado. A título de exemplo, tomando $u(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{X}\right)e^{-t}$ na equação (2) e usando os parâmetros $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $X = 1$, $g(s) = \frac{s^2}{2}$ obtemos $f(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{X}\right)e^{-t}\left(\frac{\pi}{X}\cos\left(\frac{\pi x}{X}\right)e^{-t} - 1 - \frac{\pi^2}{X^2}\right)$. Fazendo o refinamento do intervalo (isto é, realizando testes consecutivos para quantidades crescentes de subintervalos) e calculando o erro pela norma L^2 da solução numérica comparada a $u(x, t)$, temos a Tabela 1.

Tabela 1: Estudo de Erro para $u(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{X}\right)e^{-t}$.

Nº Elementos	h (X/Nº Elementos)	Erro L2	Ordem do erro
4	2.50000e-1	3.92843e-2	—
16	6.25000e-2	2.48650e-3	1.99088
128	7.81250e-3	3.88838e-5	1.99960
512	1.95312e-3	2.43027e-6	1.99998
2048	4.88281e-4	1.51892e-7	2.00000

Por fim, foram feitas exibições das soluções numéricas para a equação BBM (1) e analisamos seu comportamento total. Nota-se que, tal qual o fenômeno físico modelado pela equação, a solução numérica reproduz o comportamento esperado. A onda gerada no tempo 0 propaga-se pelo intervalo conservando sua velocidade e sua amplitude, como podemos ver na Figura 1. Na figura, exibimos dois instantes de tempo, porém para a simulação completa consulte <https://github.com/SamuelMota333/mef-cnmac-2025/blob/main/Imagens/sol-num.gif>

Referências

- [1] T. B. Benjamin, J. L. Bona e J. J. Mahony. “Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems”. Em: **Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A** 272 (1972), pp. 47–78. DOI: 10.1098/rsta.1972.0032.
- [2] M. A. Rincon e I-S. Liu. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, 2020. ISBN: 978-65-86502-00-8.