Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo de Estratégias na Convergência do Método da Potência Utilizando o Método dos Mínimos Quadrados

Maria F. O. Silva[1] Kauembergy F. Diniz[2] João P. A. Carvalho[3] João P. F. Aquino [4]
Gabriel A. Lima[5] Raissa S. Ferreira[6] Ivan Mezzomo[7]
DCME/UFERSA, Mossoró, RN

Os autovalores e autovetores estão presentes em diferentes ramos da matemática incluindo formas quadráticas, sistemas diferenciais e problemas de otimização não linear, e podem ser usados para resolver problemas em diversas áreas tais como economia, teoria da informação, análise estrutural, eletrônica, entre outros.

Para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz de forma analítica, precisamos encontrar as raizes do polinômio característico da matriz. Porém, isso se torna inviável a partir do momento em que esse polinômio tem uma grau muito elevado, assim torna-se necessário a utilização de métodos numéricos iterativos. Um dos métodos numéricos mais utilizado para calcular o maior autovalor de uma matriz é o Método da Potência (MP). Este método é limitado ao cálculo dos autovalores extremos, desde que estes sejam reais.

O objetivo deste trabalho é fazer uma análise de diferentes estratégias de aceleração do MP, a partir da função de aproximação polinômial de segundo grau do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), que foi a função mais efetiva conforme [2], e compará-lo com o MP. As estratégias abordadas neste trabalho envolve a utilização de diferentes números de iterações iniciais do MP que serão consideradas no banco de dados para começar a utilizar o MMQ. A aceleração possui como foco a diminuição do custo computacional do procedimento, reduzindo o número de iterações e tornando a operação mais eficiente na resolução de problemas.

Theorem 0.1. *[1]: Dado uma matriz real quadrada A de ordem n e seus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ com seus correspondentes autovetores $u_1, u_2, \dots, u_n$. Suponha que os autovetores são linearmente independentes e que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Seja a sequência y_k definida por $y_{k+1} = Ay_k$, com $k = 1, 2, \dots$, onde y_0 é um vetor arbitrário que permite a expansão $y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$, com c_j escalares quaisquer e $c_1 \neq 0$, então*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1, \tag{1}$$

onde r indica a r-ésima componente.

Neste trabalho vamos utilizar uma abordagem na qual aplicaremos o MMQ depois de uma certa quantidade de iterações do MP, mais especificamente, vamos fazer testes onde o início da utlização do MMQ e será dada depois de 6 (MMQ 6), 16 (MMQ 16) e 26 (MMQ 26) iterações do MP.

As matrizes utilizadas foram obtidas através do repositório Florida Sparse Matrix Collection, sendo do tipo esparsa e simétricas. Visando analisar a efetividade dos métodos propostos, as

[1]fsilva434445@hotmail.com
[2]kauembergy@gmail.com
[3]juneiras256@gmail.com
[4]joao.aquino03085@alunos.ufersa.edu.br
[5]gabriel.lima66961@alunos.ufersa.edu.br
[6]raissa.ferreira@alunos.ufersa.edu.br
[7]imezzomo@ufersa.edu.br

implementações foram efetuadas em linguagem de programação Python versão 3.11.5, em uma máquina com processador Ryzen 5 7520u 7° Geração, 8GB RAM e Sistema Operacional windows 11 de 64 bits. Como critério de parada foi usado o Erro Relativo (ER) ou 10.000 iterações, com precisão de 10^{-5}. Na tabela abaixo contém o resultados dos experimentos realizados.

Tabela 1: Resultado dos experimentos realizados

Matriz	Ordem	Método	Iter	Autovalor	ER
		MP	113	2.366980478	0.97185×10^{-5}
arc130	130	MMQ 6	33	2.365618988	0.96164×10^{-5}
		MMQ 16	84	2.365618988	0.096718×10^{-5}
		MMQ 26	114	2.367002178	0.096718×10^{-5}
		MP	130	39536719	0.95779×10^{-5}
bcsstm19	817	MMQ 6	16	39022383	0.40439×10^{-5}
		MMQ 16	25	39107119	0.87101×10^{-5}
		MMQ 26	33	39182996	0.79344×10^{-5}
		MP	220	67579067	0.97563×10^{-5}
bcsstk09	1083	MMQ 6	44	65553580	0.92232×10^{-5}
		MMQ 16	82	66702036	0.93341×10^{-5}
		MMQ 26	103	67034743	0.93003×10^{-5}
		MP	152	5.783741344	0.98892×10^{-5}
bcspwr08	1624	MMQ 6	33	5,752415587	0.99496×10^{-5}
		MMQ 16	51	5,762477916	0.92426×10^{-5}
		MMQ 26	63	5,767425455	0.93729×10^{-5}
		MP	335	127119840	0.99508×10^{-5}
bcsstk21	3600	MMQ 6	34	116592656	0.23511×10^{-5}
		MMQ 16	56	116592656	0.39840×10^{-5}
		MMQ 26	129	126156274	0.98355×10^{-5}

Analisando a Tabela 1, podemos observar que em todas as estratégias utilizando o MMQ demonstraram ser mais eficientes em relação ao MP em todas as matrizes testadas, com exceção do MMQ 26 na matriz arc130. Em todas as matrizes, a estratégia MMQ 6 se mostrou mais eficiente em relação a MMQ 16 e MMQ 26, considerando o número de iterações e o ER.

Dessa forma, podemos concluir que os resultados reforçam a relevância do método proposto como uma estratégia eficaz para acelerar a convergência do MP, e que o MMQ 6 é o mais eficiente na obtenção de autovalores de matrizes diversas. Em estudos futuros vamos explorar o impacto de diferentes funções de aproximação no MMQ, o tamanho do banco de dados e investigar a aplicação do método em classes mais amplas de matrizes, avaliando sua robustez em cenários variados.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da UFERSA e do CNPq na execução deste trabalho.

Referências

[1] R. L. Burden e J. D. Faires. **Análise Numérica**. 9ª ed. Cengage Learning, 2010.

[2] M. V. M. Lopes, H. S. Silva, I. Mezzomo, M. S. Menezes e S. B. Melo. “Estudo Preliminar da Utilização do Método dos Mínimos Quadrados no Método das Potências”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2022, pp. 010086-1–2.