Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo Comparativo entre Métodos de Integração Numérica em Integrais Triplas

Raissa S. Ferreira[1] Maria F. O. Silva[2] Kauembergy F. Diniz[3] João P. A. Carvalho[4]
Ivan Mezzomo[5] Stefeson B. Melo[6]
DCME/UFERSA, Mossoró, RN

As integrais múltiplas são uma extensão do conceito de integral definida para funções de várias variáveis. Em particular, a integral tripla amplia a integral dupla, permitindo a análise de funções definidas em um domínio tridimensional. Esse tipo de integral é fundamental para o cálculo de volumes, massas, centro de massa e momento de inércia de sólidos no espaço [1].

Em muitos casos, a resolução exata de integrais triplas é complexa ou até inviável devido à natureza das funções ou da região de integração. Nesse contexto, a integração numérica se torna uma ferramenta crucial para obter soluções aproximadas de maneira eficiente.

O objetivo deste estudo é analisar o desempenho de quatro métodos de integração numérica na resolução de integral tripla, utilizada para calcular o volume de um sólido geométrico, baseado nas dimensões reais da nacele de um aerogerador Enercon E-82 EP2 E4. A nacele é a estrutura localizada no topo da torre do gerador eólico, responsável por abrigar os componentes essenciais. Sua forma, modelada como uma elipsóide, facilita a análise da figura geométrica. O cálculo de volume é essencial para entender as propriedades físicas do aerogerador, sua interação com o ambiente e para a análise de desempenho e segurança do dispositivo.

De acordo com [2], a integração numérica tem por objetivo encontrar um polinômio no intervalo $[a, b]$ que se aproxime razoavelmente da função $f(x)$. As fórmulas fechadas de Newton-Cotes mais usadas para encontrar este polinômio são a Regra do Trapézio (RT), Regra 1/3 de Simpson (R1/3) e a Regra 3/8 de Simpson (R3/8). Esses métodos são amplamente aplicados em problemas de física e engenharia, permitindo o cálculo de integrais múltiplas com precisão.

A RT usa o polinômio de Lagrange para expressar o polinômio $P(x)$ que iterpola $f(x)$ no intervalo $[a, b]$. A RT repetida consiste na divisão do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais com amplitude $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$ e aplica a RT em cada subintervalo. Assim, temos que a RT repetida é

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\ dx \equiv \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2(f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})) + f(x_n)\right] \tag{1}$$

A R1/3 consiste em usar o polinômio de Lagrange para expressar o polinômio $P(x)$ que iterpola $f(x)$, definida em três pontos distintos e equidistantes do intervalo $[a, b]$. Assim, a R1/3 repetida consiste em dividir o intervalo $[a, b]$ em números pares de subintervalos iguais n, com amplitude $h = x_n - x_{n-1}$ e aplicar a R1/3 em cada dois intervalos consecutivos. Assim, a R1/3 repetida é

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\ dx \equiv \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_4) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \tag{2}$$

A R3/8 usa a mesma ideia da R1/3, porém o polinômio $P(x)$ que iterpola $f(x)$ está definida em quatro pontos distintos e equidistantes do intervalo $[a, b]$. Assim, a R3/8 repetida é dada por

[1] raissa.ferreira@alunos.ufersa.edu.br
[2] fsilva434445@hotmail.com
[3] kauembergy@gmail.com
[4] juneiras256@gmail.com
[5] imezzomo@ufersa.edu.br
[6] stefeson@ufersa.edu.br

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\ dx \equiv \frac{3}{8}h\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+2f(x_3)+\ldots+2f(x_{n-3})+3f(x_{n-2})+3f(x_{n-1})+f(x_n)\right] \quad (3)$$

A Quadratura Gaussiana (QG) é considerado um método numérico de alta precisão para calcular integrais, utilizando pontos e pesos específicos (nós e pesos de Gauss) para aproximar a integral de uma função e os pontos não precisam ser equidistantes. Enquanto as fórmulas de Newton-Cotes são exatas para polinômios de grau menor ou igual de n, a QG é exata para polinômios de grau menor ou igual a $2n-1$. Na QG deixamos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ indeterminados e temos

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\ dx \equiv \left(\int_{x_0}^{x_n} L_0(x)\ dx\right) f(x_0) + \ldots + \left(\int_{x_0}^{x_n} L_n(x)\ dx\right) f(x_n) \quad (4)$$

onde L_k, com $k = 0, \ldots, n$, é o polinômio interpolador de Lagrange.

PROBLEMA: Determinar o volume da elipsóide $\frac{x^2}{6.25} + \frac{y^2}{56.25} + \frac{z^2}{6.25} = 1$, usando os métodos numéricos RT, R1/3, R3/8 e QG, para 30, 60, 120, 360 e 600 subintervalos.

Neste problema usamos as coordenadas elipsoidais dadas por $x = 2.5\ r\ sen\phi\ cos\theta$, $y = 7.5\ r\ sen\phi\ sen\theta$, $z = 2.5\ r\ cos\phi$ e $\frac{\partial(xyz)}{\partial(r\phi\theta)} = 46.875\ r^2\ sen\phi$. Usando a variável radial normalizada r, temos

$$\int\int\int_V dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 46.875\ r^2\ sen\phi\ dr\ d\phi\ d\theta \quad (5)$$

Efetuamos a implementação dos métodos em Python versão 3.13.2, numa máquina com processador Intel Core i5, 8 GB de RAM e sistema operacional Windows 10. Para analisar a precisão de cada método usamos o Erro Relativo (ER). O valor analítico do volume é 196.3495408 m^3 e a análise será pela comparação entre os valores do volume de cada método com o valor analítico, conforme Tabela 1.

Tabela 1: Resultado dos experimentos realizados

Método	n = 30	n = 60	n = 120	n = 360	n = 600
RT	196.1944444	196.2847222	196.1953125	196.3352785	196.3443192
ER	7.899×10^{-4}	3.301×10^{-4}	7.854×10^{-4}	7.264×10^{-5}	2.659×10^{-5}
R1/3	197.6131687	196.8158436	196.2487139	196.3434451	196.3446194
ER	6.435×10^{-3}	2.375×10^{-3}	5.135×10^{-4}	3.104×10^{-5}	2.506×10^{-5}
R3/8	196.3498373	196.3495598	196.3495425	196.3495417	196.3495419
ER	1.51×10^{-6}	9.676×10^{-8}	8.66×10^{-9}	4.583×10^{-9}	5.602×10^{-9}
QG	198.6542064	196.8539016	196.5384605	196.3923966	196.3684712
ER	1.173×10^{-2}	2.568×10^{-3}	9.621×10^{-4}	2.182×10^{-4}	9.641×10^{-5}

Analisando a tabela acima, podemos perceber que todos os métodos tiveram desempenho satisfatórios levando em consideração o ER. Como esperado, a R3/8 se destacou pela eficiência para todos valores de n em relação aos demais métodos. O QG, por sua vez, teve maior evolução à medida que o número de intervalos aumentava, o que demonstra ser um método em que sua eficiência está diretamente ligada ao valor de n. Cabe ressaltar que, $n = 120$ e $n = 360$ foram suficientes levando em consideração o ER, uma vez que o tempo de execução dos métodos aumenta na ordem de n^3, devido ao algoritmo iterar sobre uma malha tridimensional. Como consequência, o custo computacional aumenta de forma exponencial. Portanto, podemos concluir que todos os métodos se mostraram eficientes na resolução da integral tripla.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da UFERSA na execução deste trabalho.

Referências

[1] D. M. Flemming e M. B. Gonçalves. **Cálculo B**. 2a. ed. São Paulo: Pearson, 2011.

[2] M. A. G. Ruggiero e V. L. R. Lopes. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2a. ed. São Paulo: Pearson, 2000.