Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Uma Abordagem usando o Fibrado de Clifford sobre a Geometria Diferencial de Branas

Waldyr Alves Rodrigues Jr., **Samuel Augusto Wainer**,
Instituto de Matemática e Estatística e Computação Científica, IMECC-UNICAMP,
13083-859, Campinas, SP
E-mail: walrod@ime.unicamp.br, samuelwainer@ime.unicamp.br

Resumo: *Primeiramente relembraremos, usando o formalismo do fibrado de Clifford (FFC) de formas diferenciais e a teoria dos extensores agindo em $\mathcal{C}\ell(M,g)$ (o fibrado de Clifford de formas diferencias), a formulação da geometria intrínseca de uma variedade diferenciável M equipada com um tensor métrico $\boldsymbol{g}$ de assinatura (p,q) e uma conexão compatível com a métrica arbitrária ∇, introduzindo o campo $(2-1)$-extensorial de torção τ, o campo $(2-2)$-extensorial de curvatura $\mathfrak{R}$ e (uma vez fixado o calibre) o $(1-2)$-extensor de conexão ω e o operador de Ricci $\boldsymbol{\partial}\wedge\boldsymbol{\partial}$ (onde $\boldsymbol{\partial}$ é o operador de Dirac agindo em seções de $\mathcal{C}\ell(M,g)$) o qual apresenta grande importância nesse trabalho. Em seguida, usando o FFC daremos uma apresentação da geometria Riemanniana ou Lorentziana de uma subvariedade orientável M $(\dim M = m)$ mergulhada em uma variedade $\mathring{M}$ (tal que $\mathring{M} \simeq \mathbb{R}^n$ está equipada com uma métrica semi-Riemanniana $\mathring{\boldsymbol{g}}$ de assinatura (p,q), $p+q=n$ e com conexão de Levi-Civita $\mathring{D}$) onde definimos uma métrica $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{i}^*\mathring{\boldsymbol{g}}$, onde $\boldsymbol{i}: M \to \mathring{M}$ é o mapa inclusão. Provamos várias formas equivalentes do operador de curvatura $\mathfrak{R}$ de M [11]. Mostraremos um resultado muito importante, de que o operador de Ricci de M é o (negativo) quadrado do operador de formato (shape operator do inglês)* $\mathbf{S}$ *de M (objeto obtido aplicando-se o operador projeção* $\mathbf{P}$ *à restrição sobre M do operador de Dirac $\mathring{\boldsymbol{\partial}}$ de $\mathcal{C}\ell(\mathring{M},\mathring{g})$). Também obteremos a relação entre o $(1-2)$-extensor de conexão ω e a biforma de formato (do inglês shape biform) $\mathcal{S}$ (um objeto relacionado com* $\mathbf{S}$*). Os resultados obtidos são usados para dar uma formulação matemática para a teoria de Clifford da matéria. Esperamos que nosso trabalho seja útil para geômetras diferenciais e físicos teóricos interessados, e.g., em teoria de cordas e branas e na teoria da relatividade, divulgando e expandindo resultados muito importantes que aparecem na referência [5].*

Palavras-chave: *Fibrado de Clifford, Branas, Relatividade Geral, Operadores de Formato, Operador Curvatura, Operador de Ricci, Tensor de Curvatura*

1 Introdução

Neste trabalho usamos o formalismo do fibrado de Clifford (FFC) para analisarmos a geometria Riemanniana e Lorentziana de uma subvariedade orientável M $(\dim M = m)$ mergulhada numa variedade $\mathring{M}$ tal que $\mathring{M} \simeq \mathbb{R}^n$ está equipada com uma métrica semi-Riemanniana $\mathring{\boldsymbol{g}}$ (com assinatura (p,q) e $p+q=n$) e sua conexão de Levi-Civita $\mathring{D}$. Os resultados que citamos nessa seção podem ser encontrados em [11].

Para atingirmos nossos objetivos e exibirmos alguns resultados interessantes que não são bem conhecidos (e os quais, e.g.,possivelmente podem ser do interesse para a descrição e formulação das teorias de branas [7] e teorias de cordas [1, 4]) primeiramente relembraremos como formular usando FFC a geometria intrínseca de uma estrutura $\langle M, \boldsymbol{g}, \nabla\rangle$ onde ∇ é uma conexão geral de Riemann-Cartan compatível com a métrica, i.e., $\nabla\boldsymbol{g} = \mathbf{0}$ e os tensores de Riemann e de torção de ∇ são não nulos. Na nossa abordagem introduziremos (desde de que fixado um calibre no fibrado das bases) um campo $(1,2)$-extensorial $\boldsymbol{\omega}$: $\sec \bigwedge^1 T^*M \to \sec \bigwedge^2 T^*M$ intimamente relacionado com a 1-forma de conexão que permite escrever uma fórmula muito interessante para a derivada covariante para qualquer seção do fibrado de Clifford da estrutura $\langle M, \boldsymbol{g}, \nabla\rangle$. Será mostrado que $\boldsymbol{\omega}$ está relacionado com $\mathcal{S} : \sec \bigwedge^1 T^*M \to \sec \bigwedge^2 T^*M$ a biforma de formato da variedade.

Suporemos que M é uma subvariedade *própria*[1] de $\mathring{M}$ na qual qual $\boldsymbol{i} : M \mapsto \mathring{M}$ é o mapa inclusão. Introduzindo coordenadas naturais *globais* $(\boldsymbol{x}^1, ..., \boldsymbol{x}^n)$ para $\mathring{M} \simeq \mathbb{R}^n$ escrevemos $\mathring{\boldsymbol{g}} = \sum_{i,j=1}^n \eta_{ij} d\boldsymbol{x}^i \otimes d\boldsymbol{x}^j \equiv \eta_{ij} d\boldsymbol{x}^i \otimes d\boldsymbol{x}^j$ e equipamos M com a métrica pullback $\boldsymbol{g} := \boldsymbol{i}^* \mathring{\boldsymbol{g}}$. Nós então encontramos a relação entre a conexão de Levi-Civita D de $\boldsymbol{g}$ e $\mathring{D}$, a conexão de Levi-Civita $\mathring{\boldsymbol{g}}$. Suporemos que $\boldsymbol{g}$ é não degenerado de assinatura (p, q) com $p + q = m$.

$\mathcal{C}\ell(\mathring{M}, \mathring{\mathtt{g}})$ e $\mathcal{C}\ell(M, \mathtt{g})$ denotam respectivamente o fibrado de Clifford de formas diferenciais de $\mathring{M}$ e M[2]. No que segue $\mathring{g} = \sum_{i,j=1}^n \eta^{ij} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^i} \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^j} \equiv \eta^{ij} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^i} \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^j}$ é a métrica de fibrado cotangente. O operador de Dirac[3] $\mathcal{C}\ell(\mathring{M}, \mathring{\mathtt{g}})$ e $\mathcal{C}\ell(M, \mathtt{g})$ será denotado por[4] $\mathring{\boldsymbol{\partial}}$ e $\boldsymbol{\partial}$. Tome $l = n - m$ e $\{\mathring{e}_1, \mathring{e}_2, ..., \mathring{e}_{\boldsymbol{m}}, \mathring{e}_{m+1}, ..., \mathring{e}_{m+l}\}$ uma base ortonormal para $T\mathring{U}$ $(\mathring{U} \subset \mathring{M})$ tal que $\{e_{\mathbf{1}}, e_{\mathbf{2}}, ..., e_{\mathbf{m}}\} = \{\mathring{e}_1, \mathring{e}_2, ..., \mathring{e}_{\boldsymbol{m}}\}$ é uma base para TU $(U \subset \mathring{U})$ e se $\{\mathring{\theta}^{\mathbf{1}}, \mathring{\theta}^{\mathbf{2}}, ..., \mathring{\theta}^{\mathbf{m}}, \mathring{\theta}^{m+1}, ..., \mathring{\theta}^{m+l}\}$ é a base dual de $\{e_i\}$ teremos que $\{\theta^{\mathbf{1}}, \theta^{\mathbf{2}}, ..., \theta^{\mathbf{m}}\} = \{\mathring{\theta}^1, \mathring{\theta}^2, ..., \mathring{\theta}^m\}$ é uma base para T^*U dual à base $\{e_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{e}_{\mathbf{2}}, ..., e_{\mathbf{m}}\}$ de TU. Teremos, como é bem conhecido [12]:

$$\mathring{\boldsymbol{\partial}} = \sum_{i=1}^n \mathring{\theta}^i \mathring{D}_{\boldsymbol{e}_i} = \mathring{\theta}^i \mathring{D}_{\boldsymbol{e}_i}, \quad \boldsymbol{\partial} = \sum_{i=1}^m \theta^i D_{\boldsymbol{e}_i} = \theta^{\mathbf{i}} D_{\boldsymbol{e}_{\mathbf{i}}}, \tag{1}$$

Note que usamos os índices sub e sobrescritos em negrito para denotarmo as bases $\{e_{\mathbf{i}}\}$ e $\{\theta^{\mathbf{i}}\}$ do espaço tangente e cotangente de M. Esta notação é convenientemente usada neste trabalho.

A base dual à base coordenada natural $\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^i}\}$ será denotada no que segue por $\{\gamma^i\}$ onde, $\gamma^i = d\boldsymbol{x}^i$. Além disso, denotaremos por $\{\mathring{e}^1, \mathring{e}^2, ..., \mathring{e}^m\}$ a base recíproca de $\{\mathring{e}_i\}$, i.e., $\mathring{\boldsymbol{g}}(\mathring{e}^i, \mathring{e}_j) = \delta^i_j$ e por $\{\mathring{\theta}_i\}$ a base recíproca de $\{\mathring{\theta}^i\}$, i.e., $\mathring{g}(\mathring{\theta}^i, \mathring{\theta}_j) := \mathring{\theta}^i \cdot \mathring{\theta}_j = \delta^i_j$. Também note que para $\mathbf{i}, \mathbf{j} = 1, ..., m$ vale $\mathtt{g}(\theta^{\mathbf{i}}, \theta_{\mathbf{j}}) = \mathring{\mathtt{g}}(\mathring{\theta}^i, \mathring{\theta}_j)$. Escreveremos também $\mathtt{g}(\theta^{\mathbf{i}}, \theta_{\mathbf{j}}) = \theta^{\mathbf{i}} \cdot \theta_{\mathbf{j}} = \delta^{\mathbf{i}}_{\mathbf{j}}$. A representação do operador de Dirac $\mathring{\boldsymbol{\partial}}$ na base coordenada natural de $\mathring{M}$ é, $\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \gamma^i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^i} =_{i=1}^n \mathring{\theta}^i \mathring{D}_{\boldsymbol{e}_i}$. Note que teremos $\mathring{\theta}^{m+1}\Big|_M = 0, ..., \mathring{\theta}^{m+l}\Big|_M = 0$, i.e., para qualquer campo vetorial $\boldsymbol{a} \in \sec TU$ e $d = 1, ..., l$ teremos

$$\mathring{\theta}^{m+d}\Big|_M (\boldsymbol{a}) = 0.$$

Denotaremos também

$$\mathring{\mathfrak{d}} = \mathring{\boldsymbol{\partial}}\Big|_M := \theta^{\mathbf{i}} \theta_{\mathbf{i}} \cdot \mathring{\boldsymbol{\partial}} = \sum_{\mathbf{i}=1}^m \theta^{\mathbf{i}} \mathring{D}_{\boldsymbol{e}_{\mathbf{i}}} = \theta^{\mathbf{i}} \mathring{D}_{\boldsymbol{e}_{\mathbf{i}}} \tag{2}$$

a restrição de $\mathring{\boldsymbol{\partial}}$ na subvariedade M. O operador projeção $\mathbf{P}$ (um campo extensorial[5]) em M, o *operador de formato* $\mathbf{S} = \mathring{\mathfrak{d}}\mathbf{P}$: $\sec \mathcal{C}\ell(\mathring{M}, \mathring{\mathtt{g}}) \to \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathtt{g})$ e a *biforma de formato* da variedade M, $\mathcal{S} : \sec \bigwedge^1 T^*M \mapsto \sec \bigwedge^2 T^*M$, $\mathcal{S}(a) := -(a \cdot \mathring{\mathfrak{d}} I_m) I_m^{-1}$ (onde $\tau_{\boldsymbol{g}} = I_m = \theta^1 \theta^2 \cdots \theta^m$ é a forma volume[6] em $U \subset M$) são objetos fundamentais neste estudo.

[1] Por uma subvariedade própria (ou regular [2]) M de $\mathring{M}$ nos referimos a um subconjunto $M \subset \mathring{M}$ tal que para todo $x \in M$ no domínio de uma carta (U, σ) de $\mathring{M}$ tal que $\sigma : \mathring{M} \cap U \to \mathbb{R}^n \times \{\mathbf{l}\}$, $\sigma(x) = (x^1, \cdots, x^n, l^1, \cdots, l^{m-n})$, onde $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^{n-m}$.

[2] Para as aplicações do trabalho note que $\bigwedge T^*M = \bigoplus_{r=0}^n \bigwedge^r T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \mathtt{g})$, onde o símbolo $\hookrightarrow$ significa que para cada $x \in M$, $\bigwedge T_x^*M$ (o fibrado das formas diferenciais) está mergulhado em $\mathcal{C}\ell(T_x^*M, \mathtt{g}_x)$ e $\bigwedge T_x^*M \subseteq \mathcal{C}\ell(\bigwedge T_x^*M, \mathtt{g}_x)$.

[3] Note que o operador de Dirac usado nesse trabalho age em seções do fibrado de Clifford. Não confundir com o operador de Dirac que age em seções do fibrado Espinorial (veja detalhes em [8]). Este último operador pode ser usado para examinar a topologia da brana, como mostrado em [9]

[4] Seguiremos aqui a notação usada em [12]. Aqui, diferentemente das referências [5, 6, 13], usaremos os operadores contrações à esquerda e à direita $\lrcorner$ e $\llcorner$ e o operador produto escalar (denotado por $\cdot$) agindo em seções do fibrado de Clifford. Também nossas convenções para o tensor de Riemann fazem com que algumas equações apareçam com sinais diferentes daquelas aparecendo nas referências já citadas.

[5] Para uma apresentação da teoria dos campos extensoriais, veja, e.g., [12].

[6] A forma volume $\tau_{\mathring{\boldsymbol{g}}}$ para $\mathring{U} \subset \mathring{M}$ será denotada por $I_n = \mathring{\boldsymbol{\theta}}^1 \mathring{\boldsymbol{\theta}}^2 \cdots \mathring{\boldsymbol{\theta}}^m$. A forma volume $\tau_{\mathring{\boldsymbol{g}}}$ em $\mathring{U} \subset M$ será denotada por $I_n = \mathring{\theta}^{\mathbf{1}} \mathring{\theta}^{\mathbf{2}} \cdots \mathring{\theta}^{\mathbf{m}} \mathring{\theta}^{m+1} \cdots \mathring{\theta}^{m+l} = I_m \mathring{\theta}^{\mathbf{m}} \mathring{\theta}^{m+1} \cdots \mathring{\theta}^{m+l}$.

Nos dedicamos a encontrar várias expressões equivalentes para a biforma de curvatura $\mathfrak{R}(u,v)$ em termos do operador de formato. Relembraremos que a ação do quadrado do operador de Dirac $\boldsymbol{\partial}$ em seções do fibrado de Clifford tem duas decomposições diferentes

$$\boldsymbol{\partial}^2 = -(d\delta + \delta d) = \boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial} + \boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial}, \tag{3}$$

onde d e δ são respectivamente a derivada exterior e a coderivada de Hodge e $\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial}$, $\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial}$ são respectivamente o Laplaciano covariante e o operador de Ricci. As formas explícitas de $\boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial}$ e $\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial}$ são dadas em [12] onde é mostrado que $\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial}$ é um operador extensorial e o resultado notável

$$\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial}\ \theta^i = \mathcal{R}^i, \tag{4}$$

onde os objetos $\mathcal{R}^i = R^i_j \theta^j \in \sec^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(\mathring{M}, \mathring{\mathtt{g}})$ com R^i_j as componentes do tensor de Ricci associado com D são chamadas de campos de 1-formas de Ricci. Uma das principais propostas deste trabalho é dar uma prova detalhada da notável equação

$$\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial}\ (v) = -\mathbf{S}^2(v), \tag{5}$$

que nos diz que operador de formato é a raiz negativa do operador de Ricci[7].

2 Sobre os pequenos picos de Clifford

Podemos pensar que do fato de que $\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial}\ (v) = \mathcal{R}(v) = -\mathbf{S}^2(v)$ quando pensada à luz da Relatividade Geral junto com a teoria de branas nos permite dar uma formalização matemática à intuição de Clifford[8] apresentada em [3], que diz:

> (1) As pequenas porções do espaço são de fato de uma natureza análoga a pequenos picos em uma superfície na média chata; de forma que as leis ordinárias da geometria não são válidas neles.
>
> (2) Que esta propriedade de curvatura ou distorção é continuamente passada de uma porção do espaço para outra como uma onda.
>
> (3) Que esta variação da curvatura do espaço é o que realmente acontece no fenômeno que chamamos de movimento da matéria.
>
> (4) Que no mundo físico nada mais acontece além dessa variação, sujeito (possivelmente) à leis de continuidade.

Vejamos como proceder. Seja[9] $(M, \boldsymbol{g}, D, \tau_g, \uparrow)$ um modelo de um campo gravitacional gerado por um tensor energia momento $T^{\mathbf{a}} := T^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}} \theta^{\mathbf{a}} \otimes \theta^{\mathbf{b}}$ descrevendo toda matéria do universo de acordo com a teoria da Relatividade Geral. Como é bem conhecido a equação de Einstein pode ser escrita como

$$\boldsymbol{\partial} \wedge \partial\ \theta^{\mathbf{a}} = -\mathcal{T}^{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}\mathcal{T}\theta^{\mathbf{a}}, \tag{6}$$

onde $\mathcal{T}^{\mathbf{a}} := T^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}} \theta^{\mathbf{b}}$ and $\mathcal{T} := T^{\mathbf{a}}_{\mathbf{a}}$, com $T^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}$. Se supusermos que a estrutura $(M, \boldsymbol{g})$ é uma subvariedade de $(\mathring{M} \simeq \mathbb{R}^n, \mathring{\boldsymbol{g}})$ para n grande o suficiente podemos escrever a Eq.(6) como

$$\mathbf{S}^2(\theta^{\mathbf{a}}) = \mathcal{T}^{\mathbf{a}} - \frac{1}{2}\mathcal{T}\theta^{\mathbf{a}}. \tag{7}$$

---

[7] Este resultado aparece (com o sinal positivo no segundo membro da Eq.(5) em [5]. Veja também [13]. Entretanto, leve em conta que os métodos utilizados nestas referências usam a álgebra de Clifford de multivetores e assim, comparações com os resultados lá obtidos com as apresentações padrões de geometria diferencial moderna usando formas diferenciais não são nada óbvias, esta seja provavelmente a razão do porquê desses importantes e bonitos resultados apresentados em [5] foram infelizmente ignorados.

[8] Levando-se em conta, é claro, que diferentemente da ideia de Clifford, ao invés de uma teoria espacial da matéria, precisamos falar numa teoria espaço-tempo da matéria.

[9] O símbolo $\uparrow$ significa que a variedade Lorentziana $(M, \boldsymbol{g})$ é orientada no tempo. Detalhes em [12].

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0214

Então, numa região onde não há matéria $\mathbf{S}^2(\theta^{\mathbf{a}}) = 0$, apesar do fato de que $\mathbf{S}(\theta^{\mathbf{a}}) = \mathcal{S}(\theta^{\mathbf{a}})$ pode ser *não* nulo. Então, um ser vivendo num hiper-espaço $\mathbb{R}^n$ e olhando para nossa brana-mundo verá que os pequenos picos (i.e., "matéria") são formatos especiais em M, locais onde $\mathbf{S}^2(\theta^{\mathbf{a}}) \neq 0$.

3 Uma Equação tipo Maxwell para um Brana-Mundo com um Campo Vetorial de Killing

Quando $(M, \boldsymbol{g})$ admite um campo vetorial de Killing $\boldsymbol{A} \in \sec TM$ então segue de [10] que $\delta A = 0$, onde $A = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{A}, \ ) \in \sec^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathtt{g})$. Neste caso podemos mostrar que o operador de Ricci aplicado à A é igual a operdor D'Alembertiano covariante aplicado à A, i.e.,

$$\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial} \ A = \boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial} \ A \tag{8}$$

Agora, com a Eq.(3) na qual o quadrado do operador de Dirac $\boldsymbol{\partial}^2$ pode ser decomposto de duas maneiras, conseguimos,

$$\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial} \ A + \boldsymbol{\partial} \cdot \boldsymbol{\partial} \ A = \boldsymbol{\partial}^2 A = -d\delta A - \delta dA \tag{9}$$

Por fim, escrevendo $F = dA$ e levando em conta que $\delta A = 0$ a equação de Einstein pode ser reescrita como

$$\delta F = 2\mathbf{S}^2(A) \tag{10}$$

e desde que $dF = ddA = 0$ podemos escrever a equação de Einstein como:

$$\boldsymbol{\partial} F = -2\mathbf{S}^2(A). \tag{11}$$

A Eq.(11) nos mostra que numa brana Lorentzian M de dim 4 a qual contém um campo vetorial de Killing $\boldsymbol{A}$, a equação de Einstein é codificada num "campo tipo eletromagnético" F tendo como fonte uma corrente $J = -2\mathbf{S}^2(A) \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathtt{g})$.

4 Conclusões

Neste trabalho, damos uma apresentação da geometria de variedades usando o formalismo do fibrado de Clifford, com a esperança de prover uma referência útil para pessoas (que conhecem a teoria de Cartan de formas diferencias)[10] e que estão interessadas na geometria diferencial de subvariedades M de uma variedade $\mathring{M} \simeq \mathbb{R}^n$. Provamos em detalhes diversas expressões equivalentes para a biforma de curvatura $\mathfrak{R}(u \wedge v)$ e além disso provamos que o operador de Ricci $\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial}$ quando aplicado a um campo de 1-formas v é tal que $\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial} \ (v) = \mathcal{R}(v) = -\mathbf{S}^2(v)$ ($\mathcal{R}(v) = R^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}} \theta_{\mathbf{b}}$) é o negativo do quadrado do operador de formato $\mathbf{S}$. Mostramos que quando este resultado é aplicado à Relatividade Geral permite nos dar uma realização matemática da teoria de Clifford da matéria. Também mostramos que numa brana Lorentziana contendo um campo de vetores de Killing, a equação de Einstein pode ser codificada numa equação tipo Maxwell cuja fonte é uma corrente dada por $J = 2\mathbf{S}^2(A)$.

Para finalizar observamos que embora alguns (mas não todos) resultados neste trabalho aparecem em [5, 6, 13], nossa metodologia e muitas provas diferem consideravelmente. Usamos o fibrado de Clifford de formas diferenciais $\mathcal{C}\ell(M, \mathtt{g})$) e demos provas detalhadas para todas as fórmulas, deixando claro importantes issues, apresentando, e.g., a relação precisa entre a biforma de formato S avaliada em v (um campo de 1-formas) e o extensor de conexão ω avaliado em v. Em particular, nossa abordagem também generaliza para uma conexão geral de Riemann-Cartan os resultados em [6] os quais são válidos apenas para conexão de Levi-Civita D de uma métrica Lorentziana de assinatura $(1, 3)$.

[10] Isto inclui pessoas interessadas em teoria de cordas e branas e Relatividade Geral.

Referências

[1] Becker, K., Becker M., and Schwarz, J., "String Theory and M-Theory", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[2] Choquet-Bruhat, Y, DeWitt-Morette, C. and Dillard-Bleick, M., "Analysis Manifold and Physics. Part 1: Basics (revised edition)", North Holland, Amsterdam, 1982.

[3] Clifford, W. K., On the Space-Theory of Matter, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **2**, 157-158 (1864-1876 -Printed 1876).

[4] Duff, M., M-Theory (The theory Formely Known as Strings), *Int. J. Mod. Phys. A* 11, (1996) 5623-5642.

[5] Hestenes, D., and Sobczyk, G., "Clifford Algebra to Geometric Calculus", D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1984.

[6] Hestenes, D., Curvature Calcualtions with Spacetime Algebra, *Int. J. Theor. Phys.* 25, (1986) 581-588.

[7] Mannhein, P. D., "Brane Localized Gravity", World Sci. Publ. Co., Singapore (2005).

[8] Notte-Cuello, E., Rodrigues, W. A. Jr, and Q. A. G. de Souza, The Square of the Dirac and spin-Dirac Operators on a Riemann-Cartan Space(time), *Rep. Math. Phys.* 60, (2007) 135-157.

[9] da Rocha, R., Bernardini, A. E., and Hoff da Silva, J. M., Exotic Dark Spinor Fields, *JHEP* 4, article:110 [arXiv:1103.4759] [hep-th] (2011).

[10] Rodrigues, W. A. Jr., Killing Vector Fields, Maxwell Equations and Lorentzian Spacetimes, *Adv. Appllied. Clifford Algebras* 20, (2010) 871-884.

[11] Rodrigues, W. A. Jr., Wainer, S. A., A Clifford Bundle Approach to the Differential Geometry of Branes, Advances in Applied Clifford Algebras 24, (2014) 617-847.

[12] Rodrigues, W. A. Jr. and Capelas de Oliveira, E., "The Many Faces of Maxwell Equations. A Clifford Bundle Approach", Lecture Notes in Physics 722, Springer, Heildeberg, 2007. Errata and preliminary version of a second edition at http://www.ime.unicamp.br/~walrod/recentes.htm

[13] Sobczyk, G., Conformal Mappings in Geometric Algebra, *Not. Am. Math. Soc.* **59**, (2012) 264-273.

