Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aproximação de Funções Usando Polinômios de Taylor

Raonny S. Mateus[1] Jaqueline M. da Silva[2]
ICET/UFVJM, Teófilo Otoni, MG

De forma geral, a Série de Taylor de uma função $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots . \quad (1)$$

E para o caso especial em que $a = 0$, a Série de Taylor torna-se a Série de Maclaurin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots . \quad (2)$$

Os polinômios de Taylor $T_n(x)$ que se aproximam da função $f(x)$ são tais que:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (3)$$

Segundo [2], existe um raio de convergência que define a região onde a série converge:

Teorema. *Para dada série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$, *existem apenas três possibilidades:*

(I) A série converge apenas quando $x = a$

(II) A série converge para todo x

(III) Existe um número positivo R *tal qual a série converge se* $|x-a| < R$ *e diverge se* $|x-a| > R$.

O valor R é o raio de convergência, que possibilita determinar o intervalo de convergência da série. Esse intervalo é delimitado pelo centro a, com uma extensão de R para a esquerda e para a direita. Assim, os limites do intervalo de convergência podem ser obtidos subtraindo e somando R ao valor de a, garantindo que todos os valores dentro do intervalo $(a-R, a+R)$, também pertençam à região de convergência. Para determinar R, pode-se utilizar o teste da razão que é dado por:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L. \quad (4)$$

E pelo teste da raiz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L. \quad (5)$$

[1] raonny.soares@ufvjm.edu.br
[2] jaqueline.silva@ufvjm.edu.br

Os testes podem falhar ao analisar as extremidades do intervalo de convergência. E neste caso é necessário utilizar outro método que consiste em substituir os valores das extremidades, eliminando o termo x e transformando a expressão em outro tipo de série. Se a nova série convergir, então a série original também converge nesse extremo. Assim:

Substitua $x = x_0 - R$ na série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0 - R - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n. \tag{6}$$

Substitua $x = x_0 + R$ na série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0 + R - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n. \tag{7}$$

As séries de potência são ferramentas de expansão de funções para torná-las mais simples de serem analisadas. As séries de Taylor e Maclaurin, têm inúmeras aplicações em diversas áreas da ciência, como a Física e a Computação. Têm extrema relevância na representação de funções, permitindo obter aproximações rápidas e eficazes com apenas alguns termos.

Como aplicação computacional desses conceitos, construiu-se no GeoGebra um modelo matemático em que foi possível visualizar a rápida convergência da Série de Maclaurin correspondente à função seno, como pode ser visto na Figura 1, cuja simulação computacional está disponível em [1]. Para isso, utilizou-se comandos do GeoGebra, adicionando controles deslizantes que permitem ajustar o número de termos da série, mostrando que é possível representar valores muito próximos da função exata, comprovando a eficiência dessa metodologia.

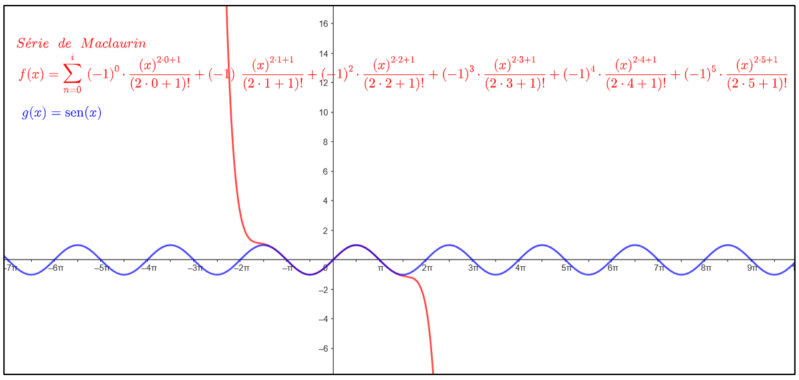

Figura 1: Aplicação da Série de Maclaurin. Fonte: Figura do Autor.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPEMIG pelo apoio financeiro para participar deste evento.

Referências

[1] R. S. N. Mateus. **Animação da Série de Maclaurin**. Online. Acessado em 21/01/2025, `https://www.geogebra.org/classic/axjqvpff`.

[2] J. L. Stewart. **Cálculo, Volume 2**. 7a. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.