Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Espaço Zip Shift e Partição Topológica

Pouya Mehdipour[1], Carlos G. F. Dias[2]
UFV, Viçosa, MG

No estudo de sistemas dinâmicos, as partições topológicas e as partições de Markov são ferramentas fundamentais para codificar comportamentos complexos em sequências simbólicas, possibilitando uma análise mais profunda de dinâmicas caóticas. Uma partição topológica divide o espaço de fases em regiões disjuntas associadas a símbolos, e a evolução do sistema gera uma sequência simbólica que traduz a dinâmica contínua em uma dinâmica simbólica.

A conjugação e a semi-conjugação topológicas obtidas por meio dessas partições não apenas simplificam a análise qualitativa dos sistemas dinâmicos, mas também servem de base para o formalismo termodinâmico – inspirado na mecânica estatística – no qual são estudadas quantidades como entropia topológica, pressão topológica e estados de equilíbrio, a partir da codificação simbólica [2].

Para sistemas inversíveis, como difeomorfismos hiperbólicos, partições topológicas e de Markov foram desenvolvidas a partir dos anos 1960, com contribuições de Smale, Sinai, Bowen, Adler, Shub, Fathi, entre outros [1]. No entanto, extensões semelhantes desses métodos para dinâmicas não inversíveis ainda são escassas na literatura.

Com base no trabalho de Lamei et al. [3], que introduziu uma nova dinâmica simbólica para sistemas não inversíveis, este trabalho propõe uma partição topológica estendida, fundamentada na codificação zip shift, permitindo a análise simbólica de mapas n-por-1 não inversíveis.

Definição 1. *Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que uma função $f : X \to X$ é um* ***homeomorfismo local*** n***-por-***1 *se existem subconjuntos conexos $X_1, \dots, X_{kn} \subseteq X$, para algum $k \geq 1$, tais que $X = \bigcup_{i=1}^{kn} X_i$, onde cada restrição $f_i := f|_{X_i} : X_i \to f(X_i) \subseteq X$ é um homeomorfismo. Cada f_i é chamado de* ***mapa local****.*

Definição 2. [1] Uma família finita de conjuntos $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, ..., R_{N-1}\}$ é uma partição topológica de um espaço métrico compacto X se:
(1) Cada R_i é aberto, **(2)** $R_i \cap R_j = \emptyset, i \neq j$, **(3)** $X = \overline{R_0} \cup \overline{R_1} \cup ... \cup \overline{R_{N-1}}$.
Definimos o diâmetro $diam(\mathcal{R})$ de uma partição $\mathcal{R}$ por

$$diam(\mathcal{R}) = max_{R_i \in \mathcal{R}} d(R_i), \qquad onde \;\; d(R_i) = sup_{x,y \in R_i} d(x, y).$$

Definição 3. Chamamos uma partição topológica $\mathcal{R}$ de **geradora** para um sistema dinâmico f se

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}\left(\bigvee_{k=-n}^{n} f^{-k}(\mathcal{R})\right) = 0.$$

Definição 4. *Considere uma aplicação f que é um homeomorfismo local n-por-1. Definimos sua* ***partição topológica do domínio*** *como o conjunto das peças de domínio associadas aos seus mapas locais.*

[1]pouya@ufv.br
[2]carlos.gabriel@ufv.br

Definição 5. *Considere $f : X \to X$ com uma partição topológica (finita) do domínio dada por $P = \{X_1, \ldots, X_n\}$. Dizemos que uma partição topológica $\mathcal{Q} = \{\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_k\}$ é uma **partição topológica da imagem** se, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mathcal{Q}_j \subseteq f(X_i)$.*

Proposição 1. *Seja (X, f) um homeomorfismo local n-por-1, e seja $\mathcal{P} = \{R_1, \ldots, R_n\}$ uma partição topológica do domínio. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, a partição $f^n(\mathcal{P})$ induz uma partição topológica da imagem.*

Considere dois conjunto de alfabetos $\mathcal{Z} = \{z_1, \ldots, z_k\}$ e $\mathcal{S} = \{s_1, \ldots, s_n\}$ com $k \leq n$.

Definição 6. *Seja $\tau : \mathcal{S} \to \mathcal{Z}$ representa um mapa sobrejetora (não nescesssáriamente inversível) e $\Sigma_{\mathcal{S}}$ um espaço full shift. Definimos o espaço **(full) zip-shift** $\Sigma = \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}$ onde a cada $x \in \Sigma_{\mathcal{S}}$ corresponde a um ponto $y \in \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}$ de modo que*

$$y_i = \begin{cases} x_i \in \mathcal{S} \ \text{se} \ i \geq 0 \\ \tau(x_i) \ \text{se} \ i < 0. \end{cases}$$

Para $x \neq y \in \Sigma$, definimos $M(x, y) = \min\{\, |i| \ ; \ x_i \neq y_i \,\}$, e a métrica $\overline{d} : \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}} \times \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}} \to \mathbb{R}$ em $\Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}$ como:

$$\overline{d}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{M(x,y)}}, & \text{se } x \neq y, \\ 0, & \text{se } x = y. \end{cases} \tag{1}$$

Definição 7. Considere o espaço métrico $(\Sigma, \overline{d})$ e um mapa de transição $\tau : \mathcal{S} \to \mathcal{Z}$. O **mapa Zip-Shift** é a aplicação $\sigma_\tau : \Sigma \to \Sigma$ definida por

$$\sigma_\tau(\cdots x_{-n} \cdots x_{-1}; x_0 x_1 \cdots x_n \cdots) = (\cdots x_{-n} \cdots x_{-1} \tau(x_0); x_1 x_2 \cdots x_n \cdots).$$

Proposição 2. *Seja $\mathcal{R}$ uma partição topológica do domínio e $f : X \to X$ um homeomorfismo local n-por-1. Para todo $p \in X$, existe uma sequência $O_p = \{(\mathcal{Q}_{s_k}, R_{s_k})\}_{k \in \mathbb{Z}}$, onde $R_{s_k} \in \mathcal{R}$ para $k \geq 0$ e $\mathcal{Q}_{s_k} \in \mathcal{Q}$ para $k < 0$, sendo $\mathcal{Q}$ uma partição topológica da imagem, tal que:* $p \in \left[\bigcap_{k<0} f^{-k}(\mathcal{Q}_{s_k})\right] \cap \left[\bigcap_{k \geq 0} f^{-k}(R_{s_k})\right]$.

Teorema 1. Considere o sistema dinâmico n-por-1 (X, f), com uma partição topológica do dominio $\mathcal{R}$ que é geradora. Então pode se associar um $\Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}$ com dinâmica simbólica estendida Zip Shift e um π como um fator do sistema dinâmico (Σ, σ_τ) para (X, f), cuja π satisfaz:
(1) $\pi\sigma_\tau = f\pi$, **(2)** π é contínuo, **(3)** π é sobrejetora.

Agradecimentos

Manifestamos nossa gratidão ao CNPq e FAPEMIG pelo apoio Financeiro.

Referências

[1] R. L. Adler. "Symbolic Dynamics and Markov Partition". Em: **Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society** Vol 35, N 1 (1998), pp. 1–56. DOI: `10.1090/S0273-0979-98-00737-X`.

[2] R. Bowen. "Some systems with unique equilibrium states". Em: **Mathematical Systems Theory** Vol 8 (1974), pp. 193–202. DOI: `10.1007/BF01762666`.

[3] S. Lamei e P. Mehdipour. "Zip shift spaces". Em: **submitted** (2021), pp. 1–28. DOI: `10.48550/arXiv.2502.11272`.