

# Melhorando Diagramas de Bifurcação em Sistemas Caóticos

Lucca F. G. Anjos<sup>1</sup>, Murilo R. Cândido<sup>2</sup>  
DMC-FCT/UNESP, Presidente Prudente, SP

A compreensão dos sistemas caóticos requer diagramas de bifurcação precisos e claros, mas problemas como passos de parâmetro inadequados, remoção insuficiente de transientes e más legendas de eixos comprometem sua qualidade [6, 7]. Neste projeto de iniciação científica, propõe-se um conjunto de diretrizes para melhorar esses diagramas fundamentadas em métodos numéricos e em rigorosas considerações matemáticas, a fim de fornecer figuras com alta resolução, pontos de tamanho adequado, letras legíveis e antialiasing eficientes. Para a obtenção de diagramas de bifurcação mais precisos, três fatores são cruciais: (i) tempo transitório suficiente para o decaimento dos transientes; (ii) tratamento da desaceleração crítica, que retarda o retorno ao equilíbrio perto das bifurcações; e (iii) consideração da multistabilidade, com múltiplos atratores coexistindo para um mesmo parâmetro [1]. Uma estratégia apresentada neste trabalho consiste em executar o sistema apenas uma vez por valor de parâmetro, reutilizando o estado anterior como condição inicial — prática que preserva a continuidade da trajetória e reduz drasticamente o custo computacional na exploração de espaços multidimensionais, onde a varredura completa seria inviável [3] — sem prejuízo da fidelidade dos diagramas.

Utilizando o software Mathematica, foram desenvolvidas rotinas paralelizadas para simulação e análise de sistemas caóticos, com ajuste dinâmico dos pontos de amostragem e aplicação de técnicas de antialiasing, resultando em diagramas com alta fidelidade visual e precisão numérica. Estudos de caso em sistemas caóticos clássicos mostram que essa abordagem permite identificar, de forma contínua, os limites de bifurcação e regiões de multistabilidade, proporcionando uma compreensão mais profunda dos comportamentos dinâmicos [4, 5].

Nossos resultados preliminares foram obtidos com base em Jafari et al. (2021) [2]. Para estudar bifurcações de Neimark–Sacker em toros invariantes, desenvolvemos um algoritmo semiautomático em coordenadas cilíndricas que, a cada variação do parâmetro de bifurcação, localiza e rastreia a órbita periódica que origina o toro, emite alertas de bifurcação e seleciona automaticamente um conjunto de condições iniciais. Um módulo paralelo calcula o valor crítico do parâmetro e a posição onde o toro emerge no espaço de fase, mesmo que instável, e um terceiro script gera uma visualização tridimensional do toro. O resultado pode ser visto na figura a seguir.

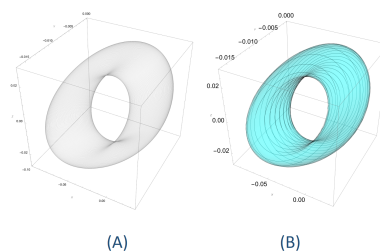


Figura 1: (A) Diagrama construído pelo método tradicional e (B) diagrama gerado pela nova técnica paralelizada, com maior fidelidade geométrica e redução. Fonte: autoria própria.

<sup>1</sup>lucca.anjos@unesp.br

<sup>2</sup>mr.candido@unesp.br

A geração de diagramas de dobra de período foi otimizada em três etapas principais: (1) paralelização dos algoritmos para acelerar a produção dos diagramas; (2) seleção automática de condições iniciais via média de pontos em órbitas de período  $2T$ ,  $4T$ ,  $8T \dots$ , eliminando transientes; (3) plotagem dinâmica que ajusta automaticamente o número de pontos e o tamanho dos marcadores a cada dobra de período, melhorando a resolução. Veja o resultado final na imagem a seguir.

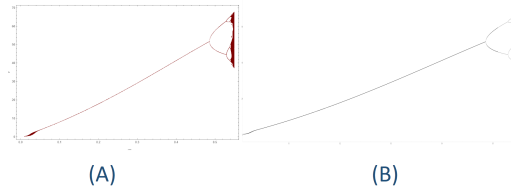


Figura 2: (A) cascata gerada pelo método convencional e (B) cascata obtida pela técnica otimizada, sem pontos transitórios e com marcadores adequados resultando em um diagrama de alta resolução e clareza visual. Fonte: autoria própria.

Por fim, destacamos que todos os algoritmos foram paralelizados, o que reduz para alguns dias o tempo que antes levava semanas para desenvolver. A principal aplicação dessas técnicas é a visualização numérica de resultados analíticos da teoria da média.

## Agradecimentos

O presente trabalho é realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brasil. Processos 2024/17134 – 4 e 2023/06076 – 0.

## Referências

- [1] M.-F. Danca, N. V. Kuznetsov e G. Chen. “Approximating hidden chaotic attractors via parameter switching”. Em: **Chaos** 28 (2018), p. 013127.
- [2] A. Jafari, I. Hussain, F. Nazarimehr, S. M. R. Hashemi Golpayegani e S. Jafari. “A Simple Guide for Plotting a Proper Bifurcation Diagram”. Em: **International Journal of Bifurcation and Chaos** 31.01 (2021), p. 2150011. DOI: 10.1142/S0218127421500111.
- [3] Y. Peng, K. Sun, S. He e O. Alamodi. “The influence of samples on meta-heuristic algorithm for parameter estimation of chaotic system”. Em: **Modern Physics Letters B** 33 (2019), p. 1950041.
- [4] K. Rajagopal, S. Jafari, V.-T. Pham, Z. Wei, D. Premraj, K. Thamilmaran e A. Karthikeyan. “Antimonotonicity, bifurcation and multistability in the Vallis model for EL Niño”. Em: **International Journal of Bifurcation and Chaos** 29 (2019), pp. 1950032–1–15.
- [5] M. Romera, G. Pastor, M.-F. Danca, A. Martin, A. Orue, F. Montoya, L. H. Encinas e E. Tundrea. “Bifurcation diagram of a map with multiple critical points”. Em: **International Journal of Bifurcation and Chaos** 28 (2018), pp. 18500651–17.
- [6] J. Sprott, S. Jafari, V.-T. Pham e Z. S. Hosseini. “A chaotic system with a single unstable node”. Em: **Physics Letters A** 379 (2015), pp. 2030–2036.
- [7] J. C. Sprott. “A proposed standard for the publication of new chaotic systems”. Em: **International Journal of Bifurcation and Chaos** 21 (2011), pp. 2391–2394.