

Grafos e Emparelhamentos de Arestas de Polígonos Regulares

Catarina Mendes de Jesus¹,
 UFJF, Juiz de Fora, MG
 Pantaleón D. Romero²,
 CEU-Cardenal Herrera, Valênciia, ES

Em Topologia Geral, o emparelhamento de arestas de um polígono regular \mathcal{P}_n com n lados pode ser visto como uma aplicação quociente que leva pares de arestas do bordo de \mathcal{P}_n a um arco de curva sobre uma superfície M . A imagem do bordo de \mathcal{P}_n forma um grafo conexo $\mathcal{G} = (V, A)$ mergulhado em M , com A arestas e V vértices, conhecido como grafo de emparelhamento de arestas de polígono regular [2]. O conjunto de segmentos de reta em \mathcal{P}_n , que conecta pares de arestas identificadas pela aplicação quociente, é chamado de diagrama de emparelhamento de arestas. Se M é uma superfície orientada com gênero g e $\mathcal{G} = (V, A)$ é um grafo k -regular (isto é, todos os vértices têm grau k), então: $V = 2(2g - 1)/(k - 2)$, $A = k(2g - 1)/(k - 2)$ e $n = 2A$. Diversas perguntas surgem sobre esses grafos e emparelhamentos de arestas, como:

- Quantos emparelhamentos existem associado a um par (\mathcal{P}_n, M) ?
- Quantos grafos de emparelhamento existem associados a um par (\mathcal{P}_n, M) ?
- Quantos diagramas existem associados a cada grafo de emparelhamento do par (\mathcal{P}_n, M) ?

Para $k = 3$, os grafos de emparelhamento trivalentes podem estar relacionados à tesselação $\{12g - 6, 3\}$ [2]. Em 1982, Jørgensen e Näätänen [3] demonstraram a existência de oito diferentes emparelhamentos de \mathcal{P}_{18} no bitoro, associados a cinco grafos trivalentes não isomorfos. Para o Tritoro Nakamura mostrou, em [6], a existência de 65 grafos trivalentes associados a 927 emparelhamentos distintos de um polígono regular com 30 lados.

Com o objetivo de determinar famílias de grafos trivalentes para superfícies com gênero $g > 3$, em [1], foi introduzido o conceito de cirurgia de emparelhamento de arestas (ver Figura 1), que permite construir novos grafos de emparelhamento para superfícies de gênero predeterminado a partir de grafos de emparelhamento já conhecidos. Essas operações, que envolvem a soma conexa dos grafos ao mesmo tempo em que se faz a soma conexa das superfícies, possibilitaram demonstrar que todo grafo resultante dessas cirurgias, aplicadas a um número finito de grafos de emparelhamento trivalentes, é também um grafo trivalente de emparelhamento de arestas, contribuindo para a obtenção de um número significativo de grafos de emparelhamento de arestas trivalentes.

Em [5], foram introduzidas as técnicas de extensão e contração de grafos em superfícies, onde um vértice com grau maior que 3 pode ser “estirado” em dois novos vértices e uma aresta. Essas técnicas garantem que qualquer grafo de emparelhamento de arestas pode ser obtido pela extensão de algum emparelhamento com único vértice e $2g$ arestas. A combinação de novas cirurgias, da extensão e contração de grafos sobre a superfície, junto com a troca de arestas sobre a superfície (ver Figura 2), onde uma aresta pode ser levada de um vértice a outro desde que não cruze nenhuma outra aresta. Essas técnicas introduzidas em [4], são suficientes para determinar qualquer grafo de emparelhamento de arestas de um polígono regular.

¹cmendesjesus@ufjf.br

²pantaleon.romero@uchceu.es

Este trabalho tem como objetivo apresentar as técnicas descritas acima, com os principais resultados, e exemplificar a construção de novos emparelhamentos a partir de emparelhamentos já conhecidos.

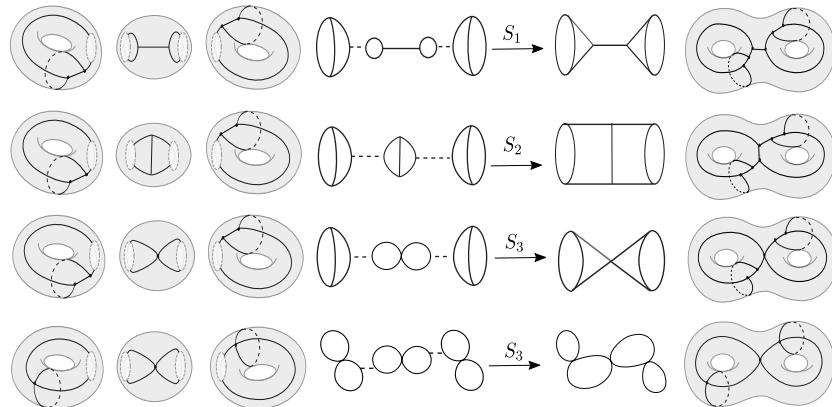


Figura 1: Exemplos de cirurgias entre dois emparelhamentos de arestas, onde os bordos das superfícies pela retirada de um “disco” centrado em uma aresta do grafo é conectado por um “cilindro” obtido pela retirada de dois discos na esfera com um determinado grafo. Fonte: Elaborado pela autora em [4].

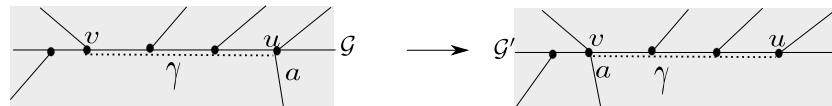


Figura 2: Exemplo local de troca de arestas sobre a superfície, onde uma aresta a é arrastada do vértice u até o vértice v . Fonte: Elaborado pela autora em [4].

Agradecimentos

Agradecemos à FAPEMIG pelo apoio concedido a este trabalho.

Referências

- [1] M. B. Faria, C. Mendes de Jesus e P. D. R. Sanchez. “Surgeries of pairing of Edges associated to trivalent graphs”. Em: **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series** 47.4 (2016), pp. 1085–1095.
- [2] M. B. Faria e R. Palazzo Jr. “Emparelhamentos Generalizados Associados à Tesselação $\{12g-6, 3\}$ ”. Em: **Trends in Computational and Applied Mathematics** 11.1 (2010), pp. 59–67.
- [3] T. Jørgensen e M. Näätänen. “Surfaces of genus 2: generic fundamental polygons”. Em: **The Quarterly Journal of Mathematics** 33.4 (1982), pp. 451–461.
- [4] C. Mendes de Jesus. “Grafos Associados aos Emparelhamentos de Arestas de Polígonos Regulares”. Em: **Trends in Comput. and Applied Mathematics** 23 (2022), pp. 335–347.
- [5] C. Mendes de Jesus e P. D. Romero. “Graphs and closed surfaces associated with a pairing of edges for Regular Polygons”. Em: **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series** 51.2 (2020), pp. 527–541.
- [6] G. Nakamura. “Generic fundamental polygons for surfaces of genus three”. Em: **Kodai Mathematical Journal** 27.1 (2004), pp. 88–104.