Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Número Cromático Antimágico Local de Duplas Vassouras com Diâmetro no Máximo 4

Lara R. Ventura[1]
PPG-MCCT/UFF, Volta Redonda, RJ
André E. Brondani[2] Francisca A. M. França[3]
VMA/PPG-MCCT/UFF, Volta Redonda, RJ

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo simples e $f : E \to \{1, 2, \ldots, |E|\}$ uma bijeção. Para cada $v \in V$, o peso de v é dado por $f^+(v) = \sum_{e \in E(v)} f(e)$, onde $E(v)$ denota o conjunto das arestas incidentes em v. Quando $f^+(v) \neq f^+(u)$ para todo par de vértices distintos $v, u \in V$, a bijeção f é denominada **rotulação antimágica** de G. Se uma tal rotulação existir, G é dito **grafo antimágico**. Em 1990, Hartsfield e Ringel [3] introduziram o conceito de rotulação antimágica de um grafo e conjecturaram que todo grafo conexo, com exceção do grafo completo K_2, é um grafo antimágico. Desde então, a conjectura tem recebido muita atenção, e foi provada para várias famílias especiais de grafos. Entretanto, a conjectura ainda não foi resolvida, mesmo para algumas famílias de grafos particularmente simples, como árvores.

Em 2017, Aramugan *et al.* [1] introduziram o conceito de **rotulação antimágica local** de um grafo G como uma versão local do conceito de rotulação antimágica de Hartsfield e Ringel, para o caso em que $f^+(v) \neq f^+(u)$ para cada par de vértices adjacentes em G. Um grafo que admite tal rotulação é chamado **grafo antimágico local**. Ambos os grupos conjecturaram que todo grafo conexo, exceto K_2, é um grafo antimágico local. Tal conjectura foi provada, em 2018, por Haslegrave [4] usando métodos probabilísticos.

Qualquer rotulação antimágica local induz uma rotulação própria dos vértices de G onde o peso do vértice $f^+(u)$ é o rótulo de u. Esse fato conduz naturalmente ao conceito de número cromático antimágico local, introduzido em [1]. O **número cromático antimágico local**, $\chi_{la}(G)$, é definido como o número mínimo de rótulos obtidos entre todas as rotulações de vértices induzidas por rotulações antimágicas locais de G.

Seja T uma árvore de ordem $n \geq 3$ com ℓ folhas. Os autores em [1] mostraram que $\ell + 1 \leq \chi_{la}(T)$. Além disso, foi conjecturado em [2] que, para qualquer árvore T com ℓ folhas, vale $\chi_{la}(T) \in \{\ell + 1, \ell + 2\}$. Motivados por essa conjectura, investigamos o problema em uma família específica de árvores, as duplas vassouras. Essa família combina simplicidade estrutural com uma assimetria controlada, oferecendo um cenário adequado para examinar a conjectura.

Dado um par de inteiros positivos p_1 e p_2, definimos uma **dupla vassoura** de diâmetro $d > 1$ como a árvore obtida a partir do caminho $P_{d-1} = (w_1 w_2 \cdots w_{d-1})$, ao qual são adicionadas p_1 e p_2 folhas nos vértices w_1 e w_{d-1}, respectivamente. Denotamos essas árvores por $B^d_{p_1,p_2}$.

Neste trabalho, construímos rotulações antimágicas locais para as duplas vassouras de diâmetros 3 e 4 e determinamos expressões para o número cromático antimágico local em cada caso. Tais resultados indicam que a variação de χ_{la} depende de forma sutil da interação entre p_1 e p_2, revelando limiares quadráticos que sugerem fenômenos análogos em famílias mais gerais de árvores. A seguir, enunciamos parte dos resultados obtidos.

[1] laraventura@id.uff.br
[2] andrebrondani@id.uff.br
[3] francisca_franca@id.uff.br

Teorema 1. *Se p_1 e p_2 são inteiros tais que $1 \leq p_1 \leq p_2$, então*

$$\chi_{la}(B^3_{p_1,p_2}) = \begin{cases} p_1 + p_2 + 2, & \text{se } p_1 = p_2 \geq 2 \text{ ou } p_2 < \frac{p_1(p_1+1)}{2}; \\ p_1 + p_2 + 1, & \text{se } p_2 \geq \frac{p_1(p_1+1)}{2}. \end{cases}$$

Teorema 2. *Seja p um inteiro positivo par. Se $p \geq 4$, então $\chi_{la}(B^4_{p,p}) = 2p + 2$.*

Teorema 3. *Sejam p_1 e p_2 inteiros tais que $p_2 - 1 \geq p_1 \geq 3$, e seja $\psi = \left\lfloor \frac{2p_1 - 5 + \sqrt{8p_1^2 + 17}}{2} \right\rfloor$.*

(i) Se $p_2 \geq \frac{(p_1-1)(p_1+2)}{2}$, então $\chi_{la}(B^4_{p_1,p_2}) = p_1 + p_2 + 1$.

(ii) Se $p_2 < \frac{(p_1-1)(p_1+2)}{2}$ e $r \in \{1, 2\}$, então

$$\chi_{la}(B^4_{p_1,p_2}) = \begin{cases} p_1 + p_2 + 1, & \text{se } p_2 \leq \psi \text{ e } p_1 + p_2 \equiv r \,(\text{mod} 4); \\ p_1 + p_2 + 2, & \text{caso contrário}. \end{cases}$$

A Figura 1 ilustra a dupla vassoura $B^4_{3,4}$ e apresenta uma rotulação antimágica local com os respectivos pesos de vértices induzidos. De acordo com o Teorema 3 tem-se $\chi_{la}(B^4_{3,4}) = 9$.

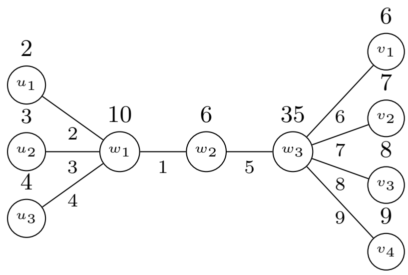

Figura 1: Dupla vassoura $B^4_{3,4}$ com $\chi_{la}(B^4_{3,4}) = 9$. Fonte: Autor

Agradecimentos

Agradecemos ao PPG-MCCT/UFF e à CAPES, (processo 88887968288/2024-00), pelo apoio.

Referências

[1] S. Arumugam, K. Premalatha, M. Baca e A. Semanicová-Fenovcíková'. "Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph". Em: **Graphs and Combinatorics** 33 (2017), pp. 275–285. DOI: `10.1007/s00373-017-1758-7`.

[2] M. Baca, A. Semanicová-Fenovciková, R. T. Lai e T. M. Wang. "On Local Antimagic Vertex Coloring for Complete Full t-ary Trees". Em: **Fundamenta Informaticae** 185 (2022), pp. 99–113. DOI: `10.3233/FI-222105`.

[3] N. Hartsfield e G. Ringel. **Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction**. Boston: Academic Press, Inc., 1994. ISBN: 9780123285539.

[4] J. Haslegrave. "Proof of a local antimagic conjecture". Em: **Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science** 20 (2018). DOI: `10.23638/DMTCS-20-1-18`.