Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Características Geométricas de uma Curva Algébrica de Quarto Grau e Aplicações em Canais de Comunicação

Rafael F. Cardoso[1]
PPGEAB/UNIFAL, Alfenas, MG
Anderson J. Oliveira[2] Cátia R. O. Q. Queiroz[3]
DEMAT/UNIFAL, Alfenas, MG

Os primeiros conceitos formais sobre códigos corretores de erros em canais de comunicação foram apresentados por Claude Shannon (1916–2001) no final da década de 1940. De acordo com [5], em seus trabalhos logo após o término da Segunda Guerra Mundial, ele estabeleceu o arcabouço conceitual para os códigos corretores de erros e definiu conceitos fundamentais para o que chamou de *teoria da informação*. Shannon não apenas destacou a importância da codificação e compressão de dados, mas também propôs um modelo de canal de comunicação semelhante ao que conhecemos hoje, delimitando os conceitos matemáticos iniciais da transmissão de informação.

Atualmente, seguindo as tendências matemáticas das décadas de 1970, com o soviético Valery Goppa, e de 1980, com o canadense Mark Goresky, a análise de curvas algébricas e espaços com curvatura negativa constituem duas linhas de estudo importantes nos sistemas de comunicação. O objetivo deste trabalho é propor uma nova abordagem para obter e interpretar os grupos fuchsianos associados à curva algébrica $y^2 = z^4 + 1$ e analisar suas propriedades geométricas. Os grupos desejados são obtidos pelo Algoritmo de Whittaker [1], com modificações fundamentais para adotar a representação em radicais das quatro raízes complexas da curva, eliminando assim aproximações na caracterização dos grupos fuchsianos [2].

Um resultado prévio necessário para as interpretações geométricas da curva a ser analisada é a generalização do ponto médio de uma geodésica no modelo do Disco de Poincaré, pois em determinados passos do Algoritmo de Whittaker esse ponto é um elemento fundamental. Após uma revisão da literatura, constatou-se que o cálculo do ponto médio se baseia, principalmente, na distância hiperbólica entre as extremidades, sem dar ênfase às coordenadas de cada extremidade. Assim, este trabalho apresenta a Proposição 1, com o objetivo de preencher essas lacunas.

Proposição 1. *Considerando uma geodésica no disco, com extremidades $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, tais que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, o ponto médio, em função das coordenadas das extremidades, será dado por e_1:*

$$e_1 = \frac{d - b + (a - c)i}{ad - bc} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(ad - bc)^2}{(d - b)^2 + (a - c)^2}}\right). \tag{1}$$

Após o cálculo do ponto médio, encontram-se as transformações relacionadas a cada lado do quadrilátero hiperbólico por meio da razão cruzada, que consiste em uma relação binária entre cada ponto da geodésica e as extremidades z_1 e z_2. Todas as raízes associadas à curva $y^2 = z^4 + 1$ são complexas e podem ser determinadas pela relação $\sqrt[4]{-1} = e^{i\frac{n\pi}{4}}$, com $n = 1, 3, 5, 7$, o que gera quatro valores correspondentes. Cada raiz corresponde a um vértice do quadrilátero hiperbólico regular. A partir dos geradores S_1S_j, com $j = 2, 3, 4$, do grupo fuchsiano, obtém-se o hexágono hiperbólico associado à curva $y^2 = z^4 + 1$. Por fim, dependendo de um emparelhamento ideal dos lados desse hexágono, o toro é atribuído como a superfície de gênero máximo associada a ele.

[1] rafael.cardoso@sou.unifal-mg.edu.br
[2] anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br
[3] catia.quilles@unifal-mg.edu.br

A Figura apresenta a representação do hexágono hiperbólico, as transformações aplicadas aos lados do mesmo e a superfície (toro), associados à curva $y^2 = z^4 + 1$.

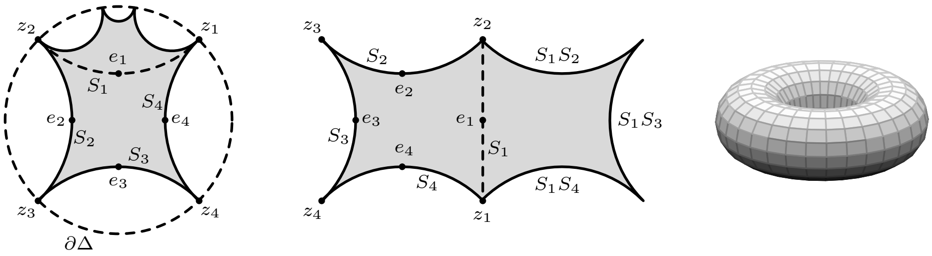

Figura 1: Hexágono hiperbólico e toro associados à curva $y^2 = z^4 + 1$. Fonte: os autores.

As ideias aqui desenvolvidas estão alinhadas com a teoria dos códigos corretores de erros, especialmente no que diz respeito às tesselações [4] e ao recobrimento de superfícies topológicas. Além disso, o grau da curva analisada e o gênero da superfície gerada pelos emparelhamentos dos lados dos polígonos hiperbólicos estão intimamente ligados [3], o que permite conectar estruturas algébricas com propriedades geométricas dos canais de comunicação. O conjunto das transformações que realizam esses emparelhamentos forma os geradores de um grupo fuchsiano, cuja caracterização exata pode trazer novas formas de abordar a codificação da informação. Dessa forma, explorar a geometria hiperbólica não só amplia as possibilidades na correção de erros, como também aponta para novos caminhos além das limitações impostas pelo sistema euclidiano.

Agradecimentos

À UNIFAL-MG e ao PPGEAB. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

[1] E. P. D. O. Guazzi. “Caracterizações algébrica e geométrica das regiões de uniformização de curvas hiperelípticas via equação diferencial fuchsiana para a construção de constelações de sinais hiperbólicas”. Tese de doutorado. Unicamp, 2019. DOI: `UNICAMP.2019.1081160`.

[2] A. J. Oliveira. “Uniformização de curvas algébricas associadas a sequências de Farey através de equações diferenciais fuchsianas na proposta de novos sistemas de comunicação”. Tese de doutorado. Unicamp, 2017. DOI: `10.47749/T/UNICAMP.2017.979662`.

[3] A. J. Oliveira, G. G. Guardia, R. Palazzo Jr., C. D. Albuquerque, C. R. O. Q. Queiroz, L. B. Lima e V. L. Vieira. “Algebraic and geometric characterizations related to the quantization problem of the $C_{2,8}$ channel”. Em: **Computational and Applied Mathematics** 43.6 (2024), p. 377. DOI: `10.1007/s40314-024-02890-5`.

[4] C. R. O. Q. Queiroz. “Códigos geometricamente uniformes derivados de grafos sobre anéis quocientes de inteiros e de ordens dos quatérnios”. Tese de doutorado. Unicamp, 2011. DOI: `10.47749/T/UNICAMP.2011.791524`.

[5] S. Verdú. “Fifty years of Shannon theory”. Em: **IEEE** 44.6 (1998), pp. 2057–2078. DOI: `10.1109/18.720531`.