Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Funções de Mittag-Leffler e a Transformada de Laplace

Graziane Sales Teodoro* **Edmundo Capelas de Oliveira**
Instituto de Matemática, Estátistica e Computação Científica, IMECC, UNICAMP,
13083-859, Campinas, SP
E-mail: ra134500@ime.unicamp.br, capelas@ime.unicamp.br

RESUMO

A metodologia da transformada de Laplace desempenha papel central na procura de uma solução particular de uma equação diferencial [1]. Essa transformada é uma ferramenta poderosa para resolver e discutir um problema de valor inicial composto por uma equação diferencial tanto ordinária quanto parcial, especialmente com coeficientes constantes [9].

Assim como o cálculo de ordem inteira tem a ele associado uma classe de funções, o cálculo fracionário, nomenclatura dada ao cálculo de ordem arbitrária, tem a ele associado algumas funções. Dentre as funções relacionadas ao cálculo fracionário a função de Mittag-Leffler merece destaque, pois esta desempenha um papel fundamental na solução de equações diferenciais fracionárias, surgindo naturalmente na solução dessas equações [2]. Uma equação diferencial fracionária pode ser interpretada como uma possível generalização de uma equação diferencial ordinária. Do mesmo modo que a função exponencial é solução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, a função de Mittag-Leffler é solução de equações diferenciais fracionárias lineares com coeficientes constantes. E, portanto, a função de Mittag-Leffler pode ser interpretada como uma generalização da função exponencial. Neste trabalho, a função de Mittag- Leffler é introduzida de forma pedagógica por meio da transformada de Laplace.

A transformada de Laplace da função exponencial é dada por

$$\mathscr{L}[e^{\mu t}] = \int_0^\infty e^{-st} e^{\mu t} dt = \frac{1}{s-\mu}, \tag{1}$$

sendo $\text{Re}(s) > \mu$. Derivando n ($n \geq 0$) vezes a Eq.(1) obtemos

$$\mathscr{L}[t^n e^{\mu t}] = \int_0^\infty e^{-st} t^n e^{\mu t} dt = \frac{n!}{(s-\mu)^{n+1}}. \tag{2}$$

Consideremos $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\mu t^\alpha)^k$, com $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ e a_k coeficientes a serem determinados. Observemos que a função g é uma generalização da função exponencial, pois basta tomar $\alpha = 1$ e $a_k = \frac{1}{k!}$ para obtermos $g(t) = e^{\mu t}$. Tomando $s = 1$ e $n = 0$ na Eq.(2) queremos encontrar os coeficientes a_k para que a seguinte equação seja válida

$$\int_0^\infty e^{-t} g(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu^k \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha k} = \frac{1}{1-\mu}.$$

Usando a definição da função gama temos $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu^k \Gamma(\alpha k + 1) = \frac{1}{1-\mu}$, sendo $|\mu| < 1$ concluímos, através do conhecimento de série geométrica, que $a_k \Gamma(\alpha k + 1) = 1$, portanto $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$.

*Estudante de doutorado.

Essa função é denotada na literatura por $E_\alpha(\mu t^\alpha)$, a chamada função de Mittag-Leffler, introduzida em 1903 por Mittag-Leffler [4].

Portanto temos, $\int_0^\infty e^{-t}E_\alpha(\mu t^\alpha)dt = \frac{1}{1-\mu}$. Introduzindo as mudanças $t \to st$ e $\mu \to \mu s^{-\alpha}$, obtemos a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler,

$$\int_0^\infty e^{-st}E_\alpha(\mu t^\alpha)dt = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \mu}. \tag{3}$$

Utilizando a Eq.(3) podemos escrever a respectiva transformada de Laplace inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \mu}\right] = E_\alpha(\mu t^\alpha),$$

Várias generalizações das funções de Mittag- Leffler foram propostas desde 1903. Em 1905 Wiman [10] generalizou essa função para dois parâmetros. Em 1971 Prabhakar [5] introduziu a chamada função de Mittag-Leffler com três parâmetros. Shukla e Prajapati [7] em 2007 introduziram a função de Mittag-Leffler com quatro parâmetros. Em 2012, Salim e Faraj [6] definiram uma função de Mittag-Leffler com seis parâmetros. E, recentemente, em 2013, Khan e Ahmed [3], introduziram uma função de Mittag-Leffler de cinco parâmetros.

Uma continuação natural deste trabalho é discutir e estudar as propriedades das chamdas funções k-Mittag-Leffler [8].

Palavras-chave: *Função de Mittag-Leffler, Transformada de Laplace, Funções especiais*

Referências

[1] W.E. Boyce, R.C. Diprima, “Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno”, LTC, Rio de Janeiro, 2010.

[2] H.J. Haubold, A.M. Mathai , R.K. Saxena, Mittag - Leffler functions and their applications, *J. Appl. Math.*, 2011 (2011) 1 - 51.

[3] M.A. Khan, S. Ahmed, On some properties of fractional calculus operators associated with generalized Mittag-Leffler function, *Thai J. Math.*, 11 (2013) 645-654.

[4] G.M. Mittag-Leffler, Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 137 (1903) 554558.

[5] T.R. Prabhakar, A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel, *Yokohama Math. J.*, 19 (1971) 7-15.

[6] T.O. Salim, A.W. Faraj, A generalization of Mittag-Leffler function and integral operator associated with fractional calculus, *J. Fract. Cal. Appl.*, 3 (2012) 1 - 13.

[7] A.K. Shukla, J.C. Prajapati, On a generalization of MittagLeffler function and its properties, *J. Math. Anal. Appl.*, 336 (2007) 797811.

[8] G.S. Teodoro, “Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag-Leffler”, Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, 2014.

[9] G.S. Teodoro, E. Capelas de Oliveira, Laplace transform and the Mittag-Leffler function, *Int. J. Math. Educ. Sci. Techn.*, (2013) 1-9.

[10] A. Wiman, Über den fundamental satz in der theorie der funktionen $E_\alpha(x)$, *Acta Math.*, 29 (1905) 191- 201.

