Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.



# Estudo Comparativo entre Homotopia e SLERP na Interpolação de Quaterniões

Ruan L. Costa[1]
IEA/Unifesspa, Santana do Araguaia, PA
Manolo R. Heredia[2] Cecilia O. Castro[3]
CPAQ/UFMS, Aquidauana, MS

A interpolação de quaterniões é utilizada em computação gráfica, robótica e visão computacional para representar rotações suaves em $\mathbb{S}^3$. O método clássico *Spherical Linear Interpolation* (SLERP) [2] é utilizado para esse fim. Neste estudo, realizado no contexto do projeto "Explorando Tópicos Avançados de Matemática em um Laboratório Virtual", investigamos a interpolação por Homotopia Normalizada como uma alternativa ao SLERP, avaliando sua precisão, suavidade e eficiência computacional. Essa abordagem pode beneficiar diretamente aplicações que exigem simulações rápidas e precisas, como controle de robôs e animações gráficas em tempo real.

O método SLERP interpola dois quaterniões $q_0$ e $q_1$ ao longo da trajetória geodésica da esfera $\mathbb{S}^3$, sendo definido como:

$$\mathrm{SLERP}(q_0, q_1, t) = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin\theta} q_0 + \frac{\sin(t\theta)}{\sin\theta} q_1, \tag{1}$$

onde $\theta = \cos^{-1}(q_0 \cdot q_1)$. Esse método garante interpolação suave e preservação da norma dos quaterniões, mas requer a avaliação de funções trigonométricas.

A interpolação por Homotopia Normalizada define uma transformação contínua entre quaterniões:

$$H(q,t) = \frac{(1-t)i(q) + tf(q)}{\|(1-t)i(q) + tf(q)\|}, \tag{2}$$

onde $i(q) = q$ e $f(q)$ representa uma transformação preservando a norma. Conceitos de homotopia são utilizados em computação gráfica e análise topológica [1].

Neste estudo, consideramos o ângulo $\theta = \pi/4$ e analisamos as funções $f$: rotação fixa $f(q) = q_r \cdot q$, onde $q_r = (\cos(\theta/2), 0, \sin(\theta/2), 0)$; exponencial quaterniônica $f(q) = e^{\theta q}$; finalmente, função oposta $f(q) = -q$. Os quaterniões iniciais $q$ foram gerados em $\mathbb{S}^3$, representando rotações distribuídas uniformemente em torno do eixo fixo $z$. Esses quaterniões são definidos como:

$$q(\alpha) = \left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\right), \quad \alpha \in [0, 2\pi]. \tag{3}$$

Inicialmente foram utilizados 50 quaterniões, posteriormente 100, 1000 e 5000. A precisão foi avaliada usando o erro absoluto e o erro médio absoluto (MAE), dados respectivamente por:

$$d(H, \mathrm{SLERP}) = \|H(q,t,f) - \mathrm{SLERP}(q, f(q), t)\|, \tag{4}$$

$$\mathrm{MAE} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \|H(q_i,t,f) - \mathrm{SLERP}(q_i, f(q_i), t)\|. \tag{5}$$

[1]ruanlion@unifesspa.edu.br
[2]manolo.r@ufms.br
[3]cecilia.o@ufms.br

Além disso, foi analisado o ângulo médio entre quaterniões consecutivos ao longo das interpolações, definido como:

$$\theta_H = \cos^{-1}(H(q,t,f) \cdot H(q,t+\Delta t,f)), \tag{6}$$

$$\theta_{\text{SLERP}} = \cos^{-1}(\text{SLERP}(q,f(q),t) \cdot \text{SLERP}(q,f(q),t+\Delta t)). \tag{7}$$

Nos experimentos, utilizou-se Python no ambiente Google Colab. Caso necessário, o código e os resultados numéricos podem ser disponibilizados para verificação. Os resultados indicaram que as interpolações por Homotopia Normalizada e SLERP mantiveram ângulos médios pequenos e relativamente constantes entre quaterniões consecutivos ao longo da interpolação, especialmente para as funções de rotação fixa e exponencial quaterniônica. Isso sugere que essas transformações preservam a suavidade sem mudanças abruptas na orientação. Além disso, a função oposta apresentou maior instabilidade, com variações mais expressivas nos ângulos, indicando trajetórias menos suaves.

Em relação à precisão, a Homotopia Normalizada apresentou erros absolutos mínimos para a rotação fixa, comparáveis ao SLERP. A função exponencial quaterniônica manteve uma boa precisão, com um leve aumento no erro absoluto, provavelmente devido à influência da normalização. A função oposta apresentou os maiores erros e inconsistências, sugerindo que sua aplicação para interpolações suaves pode não ser recomendável.

Na análise de eficiência computacional, o SLERP demonstrou um desempenho consistentemente superior à Homotopia Normalizada, exigindo menos tempo de execução em todas as transformações. A função exponencial quaterniônica foi a mais custosa computacionalmente dentro da Homotopia Normalizada, enquanto a rotação fixa se mostrou mais eficiente, mas ainda inferior ao SLERP. O aumento no número de quaterniões testados (100, 1000 e 5000) confirmou que, enquanto a precisão e suavidade se mantiveram praticamente inalteradas, o tempo de execução cresceu significativamente.

A interpolação por Homotopia Normalizada se mostrou uma alternativa viável ao SLERP para representar rotações suaves com quaterniões. Dentre as funções avaliadas, a rotação fixa foi a mais equilibrada entre precisão e eficiência computacional. A função exponencial quaterniônica também apresentou boa precisão, mas com custos computacionais mais elevados. Destacamos que a função oposta se mostrou inadequada para aplicações que exigem suavidade e precisão devido aos altos erros e instabilidades. Pesquisas futuras podem explorar técnicas de otimização computacional para ampliar a aplicabilidade da Homotopia Normalizada, tornando-a mais competitiva em termos de desempenho.

# Referências

[1] R. Forman. “Morse theory for cell complexes”. Em: **Advances in Mathematics** 134.1 (1998), pp. 90–145. DOI: 10.1006/aima.1997.1650.

[2] K. Shoemake. “Animating Rotation with Quaternion Curves”. Em: **Proceedings of the 12th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH ’85)**. 1985, pp. 245–254. DOI: 10.1145/325165.325242.