Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Resolução de problemas de otimização de risco de crédito utilizando simulação de Monte Carlo

João L. Chela, **Luiz L. Salles-Neto**

Antonio A. Chaves, **Renato Cesar Sato**

Depto de Ciência e Tecnologia, ICT, UNIFESP.

13084-790, São José dos Campos, SP

E-mail: chela.risco@gmail.com, luiz.leduino@gmail.com, antoniochaves@gmail.com, rcsato@gmail.com.

Resumo: *Nos últimos anos a indústria financeira no Brasil e no mundo vem se modernizando tendo em vista a utilização de técnicas matemáticas mais robustas e sofisticadas no momento da tomada de decisões estratégicas. Uma decisão estratégica muito comum nas instituições financeiras é a alocação ótima dos ativos financeiros. Em geral, este problema consiste em alocar uma quantidade desses ativos nas diferentes opções de investimentos disponíveis, de tal maneira que, dado um retorno esperado, minimize o risco da carteira de investimento. Neste caso os principais tipos de riscos financeiros que predominam em uma carteira de investimento são o risco de mercado e de crédito. A proposta deste trabalho é propor uma implementação da resolução do problema de otimização de crédito utilizando simulação de Monte Carlo.*

Palavras-chave: *Risco de crédito, Otimização, Simulação de Monte Carlo*

1 Introdução

Todos os dias muitas instituições financeiras no Brasil e no mundo se deparam com decisões estratégicas relacionadas ao gerenciamento de risco de crédito ver [1, 8]. Uma decisão estratégica envolve a seleção ótima de carteiras ou investimentos sujeitos a risco de crédito. No dia 19 de janeiro de 2014 o jornal Folha de São Paulo noticiou que uma operação do banco BVA afetou mais de 70 fundos:

"Mais de 70 fundos de pensão de empresas estatais e de prefeituras de todo o país correm o risco de perder a maior parte dos R$ 2,7 bilhões que investiram na compra de papéis lastreados por empréstimos originados no Banco BVA, em processo de liquidação desde agosto".

Trata-se, de fato, de uma questão importante para o país e sua população, não apenas para as instituições financeiras.

Na seleção ótima de investimentos com risco de crédito, em linhas gerais, o gestor de recursos da instituição financeira necessita tomar a decisão de investimento em ativos para seus clientes ou para a própria instituição financeira. Se a decisão de investimentos envolve instrumentos de renda fixa com risco de crédito, neste caso, títulos privados, o gestor necessitará que a sua carteira mantenha um retorno esperado e ofereça o mínimo risco de crédito.

A decisão acima envolve a solução de um problema de otimização que muitas vezes apresenta propriedades teóricas complexas e merecem atenção no tratamento computacional. Além disso, é necessária definir bem como gerar os cenários de crédito.

Existem na literatura metodologias e alternativas de solução do problema associado ver [6, 9, 3]). Neste contexto o presente trabalho propõem uma abordagem de otimização de risco de crédito utilizando simulação de Monte Carlo que pode ser aplicada por financeiras e utilizando poucos recursos computacionais em alguns casos.

2 Medidas de Risco de Crédito

2.1 Risco de Crédito

Conforme a resolução CMN 3721, publicada pelo Banco Central do Brasil em 30 de Abril de 2009, podemos definir risco de crédito como a possibilidade de ocorrência de perdas associadas ao não cumprimento pelo tomador ou cliente de suas respectivas obrigações financeiras nos termos pactuados.

2.2 Probabilidade de Default

A probabilidade de default caracteriza-se como o percentual que corresponde à expectativa de longo prazo das taxas de inadimplência, para o horizonte temporal (por exemplo 1 ano). A probabilidade de inadimplência, tem papel importante na gestão de risco de crédito, auxiliando na constituição de provisões, na precificação das operações de crédito e no estabelecimento de limites de crédito.

2.3 Perda de Crédito

Neste trabalho chamaremos de perda de crédito ou simplesmente exposição ao risco de crédito, a quantia financeira que uma instituição financeira perde dado que acontece a inadimplência de um cliente.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0144

3 Simulação de Monte Carlo para Risco de Crédito

Designa-se por método de Monte Carlo qualquer método de uma classe de métodos estatísticos que se baseiam em amostragens aleatórias massivas para obter resultados numéricos.

No caso da simulação de Monte Carlo para risco de crédito, estamos interessados em simular uma variável que recebe o valor 0 (zero) ou 1(um).

Para exemplificar a simulação, considere uma carteira de crédito composta por dois clientes. Cada cliente possui probabilidade de default,(p_A e p_B), perda de crédito, (E_A e E_B) e para cada cliente vamos associar uma variável, z_A ou z_B, que receberá os valores 0(zero) ou 1(um). Esta variável receberá o valor 1(inadimplência) com probabilidade p e 0(Não Inadimplência) com probabilidade $(1-p)$, com distribuição Bernoulli com média p e variância $p-p^2$ [ver [5]].

Com essas definições é pssível simular cenários de inadimplência para uma carteira. Vale observar que um cliente estará em condições de inadimplência se a variável simulada recebe o valor 1.

Para gerar estes cenários, considere o seguinte algoritmo:

Seja N o número de cenários aleatórios que estamos interessados em gerar.

Passo 1: $(i = 1...., N)$

1_A : (Para o cliente A)- Gere um número aleatório com distribuição uniforme entre $[0,1]$, neste caso μ_A^i.

Se $\mu_A^i < p_A \Longrightarrow z_A^i = 1$(Inadimplência do cliente), caso contrário $z_A^i = 0$(Não Indadimplência).

1_B : (Para o cliente B)- Gere um número aleatório com distribuição Uniforme entre $[0,1]$, μ_B^i

Se $\mu_B^i < p_B \Longrightarrow z_B^i = 1$ (Inadimplência do cliente), caso contrário $z_B^i = 0$ (Não Indadimplência).

Repita o procedimento para os N cenários e considere os seguintes vetores.

$z_A^t = [z_A^1, z_A^2, ..., z_A^N]$ e $z_B^t = [z_B^1, z_B^2, ..., z_B^N]$.

Observe que os componentes deste vetores são zero e um. Deste modo, geramos N cenários de crédito para a carteira.

Por exemplo, suponhamos que para o cenário k, $z_A^k = 1$ e $z_B^k = 0$, este cenário significa que o cliente A entrou em estado de inadimplência, mas o cliente B não.

Feita a geração de cenários, temos que definir uma função perda dado o cenário realizado.

Seja $f(x, y_i) = xy_i^t$, onde $x = [E_A E_B]$ e $y_i = [z_A^i z_B^i]$.

Por exemplo, se $x = [1.000, 500]$ e $y_i = [1, 0]$, então $f(x, y_i) = 1.000 \times 1 + 500 \times 0 = 1.000$. Portanto neste cenário a perda da carteira será de 1.000. A função $f(x, y_i)$ será chamada de função perda avaliada em x no cenário y_i e será utilizada na próxima seção.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0144

Observe que o procedimento acima é simples e pode ser gerado com a utilização de ferramentas computacionais comuns, por exemplo o Excel.

Esta e outras técnicas de simulação de Monte Carlo podem ser encontradas em [8].

4 O Problema de Otimização de Risco de Crédito

O objetivo desta seção é apresentar o problema de otimização de risco de crédito de uma carteira de investimentos estudada em [3]. Para isso precisamos definir algumas medidas de risco.

Consideremos $f : I\!R^n \times I\!R^m \to I\!R$ como a função perda para uma carteira de crédito, onde $x \in I\!R^n$ é o vetor composição da carteira e $y \in I\!R^m$ é um vetor aleatório de cenários de crédito. Deste modo, se $y \in R^m$ é uma vetor aleatorio, podemos associar a ele uma função de distribuição de probabilidade $p : I\!R^m \to I\!R$, e assim definir a probabilidade de que a perda não utrapasse um escalar α da seguinte forma

$$\Psi(x, \alpha) = \int_{f(x,y)\leq\alpha} p(y)dy$$

$\Psi(x, \alpha)$ representa a probabidade da perda da carteira ser menor ou igual a α.

Deste modo, podemos definir a primeira medida de risco.

Consideremos a seguinte função

$$\alpha(x, \beta) = min\{\alpha \in I\!R : \Psi(x, \alpha) \geq \beta\}$$

Para x fixo o valor $\alpha(x, \beta)$ será chamado de Valor em Risco, ou simplesmente de βVaR associado ao intervalo de confiança β.

Além do βVaR podemos definir uma medida de risco condicional ao VaR que será chamada de $\beta CVaR$. Esta medida é o valor médio dos valor de perda que são maiores ou igual ao βVaR:

$$\Phi(x) = (1 - \beta)^{-1} \int_{f(x,y)\geq\alpha(x,\beta)} f(x, y)p(y)dy$$

Os próximos teoremas são importantes para relacionar os minimizadores da função definidas acima (as demonstrações podem ser encontradas em [6]). A chave para isso é a definição da seguinte função:

$$F_\beta(x, \alpha) = \alpha + (1 - \beta)^{-1} \int_{y\in R^n} [f(x, y) - \alpha]p(y)dy$$

onde $(a)^+ = a$ se $a \geq 0$ e é igual a zero caso contrário.

Podemos agora enunciar dois teoremas cruciais demonstrados por Rockafellar [6]:

Teorema 4.1. Para $x \in R^n$ fixo, suponhamos que $F_\beta(x,\alpha)$ é convexa, contínua e diferenciável em relação a α. Então $\beta CVaR$ associado a qualquer $x \in R^n$ fixo pode ser determinado da seguinte forma:

$$\Phi(x) = \min_{\alpha \in I\!R} F_\beta(x,\alpha)$$

Prova: ver [6]

Observe que o teorema acima afirma que o $\beta CVaR$ pode ser calculado resolvendo um problema de otimização convexo sem que o βVaR seja calculado a priori.

Teorema 4.2. Suponhamos que $F_\beta(x,\alpha)$ é convexa, contínua e diferenciável. Então o mínimo $\beta CVaR$ associado a qualquer $x \in R^n$ pode ser calculado minimizando $F_\beta(x,\alpha)$ em relação a (x,α), ou seja:

$$\min_{x \in I\!R^n} \Phi(x) = \min_{(x,\alpha) \in I\!R^n \times I\!R} F_\beta(x,\alpha)$$

Prova: ver [6]

O Teorema acima caracteriza o problema de otimização de crédito tomando-se por base a função objetivo $\beta CVaR$. Observe que apesar de encontrar a composição ótima da carteira que minimiza $\beta CVaR$, esta solução não minimiza o βVaR, mas é o $\beta CVaR$ correspondente para esta composição de investimento x. Em [6] é prosposta a seguinte aproximação da função objetivo do problema.

$\bar{F}(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{(1-\beta)*J} \sum_{i=1}^{J} (f(x,y_i) - \alpha)^+$

Onde J é a quantidade de cenários aleatório, y_i é um vetor de cenários , $f(x,y_i)$ é o valor da perda em cada cenário $i = 1, ..., J$ dado a composição x.

Portanto, podemos utilizar esta nova função objetivo discreta para a implementação do problema de otimização.

Algumas caracteristicas deste problemas são destacadas em [6].

1- O problema discretizado torna-se um problema de otimização linear se $f_i(x,y)$ são lineares, tendo em vista que o conjunto de restrições é linear.

2- A função objetivo não é diferenciável.

3- A função $\bar{F}(x,\alpha)$ é convexa quando $f(x,y_i)$ são convexas.

5 Testes Numéricos

Realizamos os testes numéricos considerando a geração de 2.000 cenários de crédito, ou seja, para cada problema foram geradas $f(x,y_i)$, $i = 1...,2.000$ conforme proposto na seção de simulação de Monte Carlo. Todas as simulações foram realizadas em Excel. Utilizamos a ferramenta de otimização do Microsoft Excel (SOLVER) com o método GRG (Gradiente Reduzido Generalizado) [7] e não utilizamos nenhuma reformulação diferenciável para a função objetivo.

Desta forma, consideremos o seguinte exemplo:

1- Uma instituição financeira pretende aplicar dez milhões de reais (10NM) em títulos de renda fixa sujeitos ao risco de crédito, mas para isso precisa decidir como deve ser feita esta aplicação de tal forma que minimize o $\beta CVaR$ e obtenho um retorno mínimo desejado. Utilizamos $\beta = 99\%$.

As tabelas abaixo descrevem as características de cada opção de investimento(título de renda fixa), onde para cada opção temos: PD - Probabilidade de Inadimplência do Emissor do Título; spread - Rentabilidade no período(ano) do Título; limite - Percentual máximo de investimento na opção.

Neste caso, o problema de otimização terá as seguintes restrições:

1- Os percentuais de aplicação(Pesos): a variável x deve ser positiva e não maiores que 100%, ou limites de concentração.

2- Retorno mínimo exigido, neste caso $\sum x_i \times spread_i \geq retorno$

A tabela abaixo caracteriza as variáveis de entrada do problema (com limites de concentração). Observe que neste caso as opções B e D não podem ter um investimento superior a 10%.

Tabela 1: Parâmetros de Entrada (Com Limites de Concentração)

	PD	spread	limite
Opção A	2%	3.0%	100%
Opção B	5%	7.5%	10%
Opção C	7%	10.0%	100%
Opção D	10%	12.0%	10%

Tabela 2: Resultados obtidos (Com Limites de Concentração)

	Peso A	Peso B	Peso C	Peso D	Retorno	βVaR	$\beta CVaR$	Percentil
Retorno 6%	40%	10%	40%	10%	$7,15\%$	$5,00$	$5,65$	$5,00$
Retorno 10%	0%	8%	82%	10%	10%	$8,2$	$9,08$	$8,2$

Vale observar em todos os casos a solução foi encontrada e que o tempo numérico para resolução foi sempre menor que 1 minuto. Outros testes foram realizados com resultados similares.

6 Conclusões e Perspectivas

Nesse trabalho é proposta uma metodologia simples de geração da distribuição das perdas de crédito por meio da simulação de Monte Carlo. Mais do que disso, propõe uma estratégia de

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0144

otimização de uma carteira de crédito utilizando uma medida de risco que considera eventos extremos, diferente de trabalhos que usam medidas de risco considerando somente condições normais de mercado. A formulação utilizada possui propriedades teóricas que facilitam a determinação de condições de otimalidade. A junção de uma simples metodologia de geração da distribuição das perdas de crédito com uma adequada estratégia de otimização em um mesmo trabalho constitui-se uma inovação que pode ser facilmente implementada por instituições financeiras no Brasil.

Com base nos bons resultados obtidos nesse trabalho os autores esperam desenvolver novas técnicas para o mesmo problema abordado da forma multiobjetivo, onde busca-se soluções eficientes em relação a dois objetivos importantes: minimizar o risco de crédito e maximizar o retorno.

Referências

[1] L.S. Abraham, *Credit Scoring, Desenvolvimento, Implantação e Acompanhamento*, Editora Blucher (2010)

[2] C. Acerbi, D. Tasche, *Expected Shortfall. a natural coherent alternative to Value at Risk.* Economic Notes, 31 2, 379-388 pp. 7-12, (1999).

[3] F. Andersson, H. Mausser, D. Rosen, S.Uryasev, *Credit Risk Optimization with Conditional Value-At-Risk Criterion*, Mathematical Programming, Series B 89, 273-291, (2001).

[4] P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber, e D, *Heath Coherent Measures of Risk. Mathematical Finance*, 9, 2003-228, (1999).

[5] W. Bussab de O., P.A. Morettin, *Estatística Básica*,5 ed. - São Paulo: Saraiva, (2005).

[6] R. T. Rockafellar and S. Uryasev, *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, Journal of Risk 2 Pages: 21-41 January, (2000).

[7] L. S. Lasdon et al. *Design and testing of a generalized reduced gradient code for nonlinear programming.* ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), v. 4, p. 34-50, (1978).

[8] P.J. Schonbucher, *Credit Derivatives Pricing models - Models, Pricing and Implementation*, Wiley Finance Series, November, (2003).

[9] S. Uryasev, Conditional Value-at-Risk, *Optimization Algorithms and Applications Financial Engineering*, News January, (2003).

