

# Solução do Problema de Riemann Descrevendo o Deslocamento de Espuma com Adsorção Aplicado à Indústria de Petróleo

Giulia C. Fritis<sup>1</sup> Pavel S. Paz<sup>2</sup> Luis F. Lozano<sup>3</sup> Grigori Chapiro<sup>4</sup>  
LAMAP, UFJF, Juiz de Fora, MG

**Resumo.** Motivados pelo deslocamento de espuma em meios porosos com adsorção linear, estendemos trabalhos já existentes para o escoamento bifásico contendo um traçador ativo descrito por um sistema de leis de conservação não estritamente hiperbólico. Classificamos as soluções no plano de fase contendo todos os possíveis estados à esquerda e à direita conectados por uma sequência de ondas compatíveis. Destacamos que existem regiões de parâmetros onde mais de uma sequência de ondas compatíveis ocorre. Mostramos que o modelo implementado no CMG-STARS, descrevendo o deslocamento de espuma em meios porosos com adsorção, satisfaz as propriedades necessárias para aplicar a teoria desenvolvida. Apresentamos regiões de parâmetros onde o modelo do CMG-STARS possui uma falta de unicidade da solução no plano de fase, levando a uma perda de estabilidade estrutural. Mostramos também que este modelo é bem-posto no sentido de Hadamard, podendo apresentar oscilações devido à perda de estabilidade estrutural. Descrevemos o bando de surfactante como uma sequência de dois problemas de Riemann, determinamos cenários onde a espuma apresenta um melhor desempenho e avaliamos o impacto da adsorção.

**Palavras-chave.** Problema de Riemann. Meio Poroso. Leis de Conservação. Espuma.

## 1 Introdução

O objetivo deste trabalho é investigar o banco de surfactante para a recuperação avançada de petróleo (Enhanced Oil Recovery - EOR). Neste estudo, descrevemos o banco de surfactante como uma imbibição seguida por uma drenagem para formação de espuma. Para descrever esses processos, adotamos um sistema de leis de conservação considerando a adsorção linear do químico na rocha. Os processos de drenagem e imbibição podem ser descritos por problemas de Riemann associados ao sistema de leis de conservação, motivando a obtenção da solução global do problema de Riemann. Utilizamos a função de fluxo fracionário implementada no simulador comercial CMG-STARS, que descreve a textura da espuma em equilíbrio local como função do químico. Avaliamos o impacto da adsorção do surfactante na rocha porosa durante o banco de surfactante. Este trabalho foi motivado pelo interesse da indústria de petróleo em determinar a menor quantidade de químico/surfactante necessária para evitar a formação de *viscous fingering* e a avaliação da influência da adsorção no banco de surfactante.

Podemos definir métodos de EOR como a injeção de materiais que normalmente não estão presentes no reservatório. Podemos destacar como métodos de EOR a injeção de gás [19], a injeção

---

<sup>1</sup>giufritis@gmail.com

<sup>2</sup>psejasp@gmail.com

<sup>3</sup>luisfer99@gmail.com

<sup>4</sup>grigorichapiro@gmail.com

térmica como combustão in-situ [3, 7], e a injeção química como a injeção de polímero [14–16] ou a injeção de espuma [8, 10, 12, 18]. Essa última é tratada neste trabalho.

Utilização de injeção de gás para EOR possui alta eficiência, porém é reduzida devido à heterogeneidade do reservatório, gradientes gravitacionais e instabilidades. O uso de espumas pode ajudar na solução de todos os três problemas encontrados na varredura do gás [2]. O uso apropriado de espumas para EOR resulta em uma significativa redução da mobilidade da fase gasosa. Dessa forma, uma grande parcela da espuma fica presa no meio poroso, resultando em um desvio de uma parte do fluido subsequente para uma camada com permeabilidade mais baixa ou saturação de óleo mais alta, levando a uma melhor varredura da espuma por todo o meio poroso [18].

Tipicamente, a espuma é estável na presença de surfactantes. Após a injeção de uma solução contendo surfactante no meio poroso, ocorre o processo de adsorção do surfactante, em que suas moléculas se instalam nas paredes do meio poroso. Tais perdas têm potencial de desestabilizar a espuma, além de poderem tornar o processo economicamente inviável [6]. Portanto, é vital entender como o processo de adsorção evolui durante o EOR para determinar sob quais condições a espuma se mantém durante toda a injeção.

Este trabalho está organizado como segue. O problema de Riemann para o deslocamento de espuma é apresentado na Seção 2. Na Seção 3 discutimos as propriedades da função de fluxo fracionário. Na Seção 4 apresentamos o modelo implementado no simulador CMG-STARS. Na Seção 5 construímos a solução do problema de Riemann. Na Seção 6 apresentamos como obter o banco de surfactante ótimo. Na Seção 7 apresentamos os resultados deste trabalho.

## 2 Modelo do Transporte de Espuma em Meios Porosos com Adsorção Linear do Surfactante

Durante este trabalho, supomos: meio poroso homogêneo, fluxo bifásico de água e gás, fluxo unidimensional, viscosidades Newtonianas, ausência de gradiente de pressão capilar, efeitos gravitacionais desprezíveis, ausência do fenômeno de dispersão, fases incompressíveis, ausência de *viscous fingering* e que atingimos imediatamente o comportamento de equilíbrio local. Sob essas hipóteses, é possível descrever nosso problema através do seguinte sistema de leis de conservação

$$\partial_t S + \partial_x f(S, C) = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t [(S + \mathcal{A})C] + \partial_x [f(S, C)C] = 0, \quad (2)$$

onde  $S$  é a saturação água,  $f$  é a função de fluxo fracionário da água,  $C$  é a concentração de surfactante na água e  $\mathcal{A}$  é uma constante, dada por

$$\mathcal{A} = \frac{1}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \left( S_{wc} + \frac{(1 - \phi)\rho_s K_d^a}{\rho_w \phi} \right), \quad (3)$$

onde  $S_{wc}$  é a saturação de água conata,  $S_{gr}$  é a saturação de óleo residual,  $\phi$  é a porosidade,  $\rho_w$  é a densidade da água,  $\rho_s$  é a densidade da rocha e  $K_d^a$  é conhecido como o coeficiente de Henry, que representa a fração do surfactante adsorvido na rocha.

De agora em diante, estudamos o problema de Riemann do sistema (1)-(2) considerando o seguinte dado inicial

$$(S(x, 0), C(x, 0)) = \begin{cases} (S_L, C_L), & \text{se } x < 0, \\ (S_R, C_R), & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

## 3 Propriedades da Função de Fluxo Fracionário

Neste trabalho, supomos que a função de fluxo fracionário  $f$  satisfaz as seguintes propriedades:

- a) A função  $f \in \mathcal{C}^2$ ,  $f(0, C) = 0$  e  $f(1, C) = 1$  para todo  $C \in [0, 1]$ . Além disso,  $\partial_S f(0, C) = 0 = \partial_S f(1, C)$  para cada  $C$ .
- b) Para cada  $C$ ,  $f_w(S, C)$  é estritamente crescente em relação a  $S$  com um único ponto de inflexão, que denotaremos por  $S^i$ , onde a derivada segunda de  $f$  com respeito a  $S$  é positiva à esquerda de  $S^i$ , e negativa à direita de  $S^i$ .
- c) A derivada parcial  $\partial_C f(S, C) > 0$ , para  $S$  e  $C$  no domínio físico.

Tais hipóteses são análogas às adotadas nos trabalhos [14–16], onde se considerou que  $f$  é uma função decrescente em relação a  $C$ . Embora essa diferença seja consequência da diferente física representada, podemos recorrer a um cenário próximo através da mudança de variável  $\bar{C} = 1 - C$ , onde a diferença permanece devido à presença da constante  $\mathcal{A}$ . Com essas propriedades, para  $C$  constante, temos que o sistema (1)-(2) se reduz à equação de Buckley-Leverett [5].

## 4 Modelo CMG-STARS

Nesta seção, apresentamos o modelo de espuma em equilíbrio implementado no simulador CMG-STARS [1], que será utilizado durante esse trabalho.

O efeitos da espuma são representados através o termo de redução de mobilidade,  $FM$ , dado por

$$FM(S, C) = (1 + fmmob F_1(C) \cdot F_2(S))^{-1}, \quad (5)$$

onde  $fmmob$  representa o fator de redução de mobilidade de referência (se esse parâmetro é zero, não temos espuma). A função  $F_2$  representa os efeitos da saturação da água:

$$F_2(S) = 0.5 + (\arctan(epdry((1 - S_{wc} - S_{gr})S + S_{wc} - fmdry))) / \pi, \quad (6)$$

onde  $fmdry$  é a saturação crítica da água e  $epdry$  representa o declive dos efeitos de secagem. A função  $F_1$  descreve os efeitos da concentração de surfactante, dada por

$$F_1(C) = \begin{cases} \left(\frac{C_{max}}{fmsurf} C\right)^{epsurf}, & \text{se } C_{max} C < fmsurf, \\ 1, & \text{se } C_{max} C \geq fmsurf, \end{cases} \quad (7)$$

onde  $fmsurf$  é a concentração crítica de surfactante e  $epsurf$  um expoente.

A função de fluxo fracionário é dada por

$$f(S, C) = k_{rw}(S) / ((k_{rw}(S) + (\mu_w / \mu_g)k_{rg}(S) \cdot FM(S, C))), \quad (8)$$

onde  $k_{rw}$  e  $k_{rg}$  são as permeabilidades relativas da água e do gás (seguindo o modelo Brooks-Corey [4]) respectivamente, e  $\mu_w$  e  $\mu_g$  são as viscosidades da água e do gás. Em [11], foi mostrado que este modelo satisfaz as propriedades apresentadas na Seção 3, adotando parâmetros da Tabela 1 de [11]. Dessa forma, podemos aplicar a teoria apresentada a seguir ao modelo de espuma em equilíbrio implementado no simulador CMG-STARS.

## 5 Solução do Problema de Riemann

Nesta seção investigamos o problema de Riemann (1)-(2) e (4). A construção da solução global pode ser encontrada com maiores detalhes em [11]. Reescrevendo o sistema na forma geral

$$U_t + A(U)U_x = 0, \quad (9)$$

onde a matriz  $A(U)$  é dada por

$$A(U) = \begin{bmatrix} \partial_S f & \partial_C f \\ 0 & f/(S + \mathcal{A}) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Os autovalores e autovetores associados à matriz  $A(U)$  são:

$$\lambda_S = \partial_S f, \quad r_S = (1, 0)^T, \quad (11)$$

$$\lambda_C = f/(S + \mathcal{A}), \quad r_C = (\partial_C f, f/(S + \mathcal{A}) - \partial_S f)^T. \quad (12)$$

Para cada  $C$  fixo, existe um único  $S^* = S^*(C)$  tal que

$$\lambda_S(S^*, C) = \lambda_C(S^*, C). \quad (13)$$

Nos pontos  $(S^*, C)$  a matriz  $A$  não é diagonalizável. Similar ao feito em [14–16], podemos classificar o plano de fase em função da sequência de ondas que compõem a solução, resolvendo globalmente o problema de Riemann (1)-(2) e (4).

Notamos que existem condições iniciais nas quais mais de uma sequência de onda é possível. Estudando o comportamento dessas soluções, observamos que dependem continuamente dos dados iniciais e são únicas adotando a norma do espaço  $L^p$  para  $p \in \mathbb{N}$ . Concluímos assim que o problema de Riemann estudado é bem-posto no sentido de Hadamard. Apesar disso, pequenas mudanças nas condições iniciais podem resultar em soluções qualitativamente diferentes, indicando que o problema de Riemann possui instabilidades estruturais [13, 20] nos conjuntos de parâmetros onde há perda de unicidade. A Fig. 1 apresenta um exemplo da mudança qualitativa do perfil da saturação de água para pequenas variações de  $U_R$  no cenário onde há perda de unicidade. Essas soluções foram obtidas numericamente pelo Solver Reaction Convection Diffusion Equations (RCD).

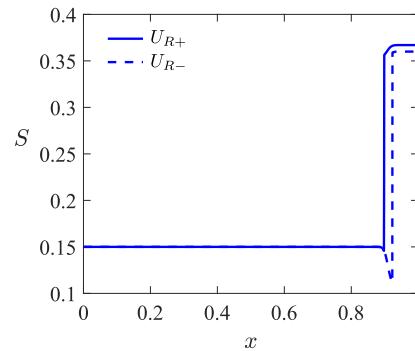


Figura 1: Perfis da saturação da água no tempo  $t = 3$  para o estado à esquerda  $U_L = (0.15, 0.4)$  e estados à direita próximos:  $U_{R-} = (0.360, 0.7273)$  e  $U_{R+} = (0.367, 0.7273)$ . Fonte: [9].

## 6 Banco de Surfactante Ótimo

Nesta seção, estudamos o banco de surfactante e como melhorar seu desempenho na varredura do meio poroso. Como estamos interessados na formação de espuma *in-situ*, consideramos o banco de surfactante como um processo de imbibição ( $RP_1$ ) seguido por um processo de drenagem ( $RP_2$ ), conforme a Fig. 2. Denotamos por  $U_L^1$  e  $U_R^1$  as condições iniciais do  $RP_1$ ,  $U_L^2$  e  $U_R^2$  as condições iniciais do  $RP_2$ . A velocidade da frente do gás  $v_g$  é dada pela velocidade final do  $RP_2$ , e a velocidade

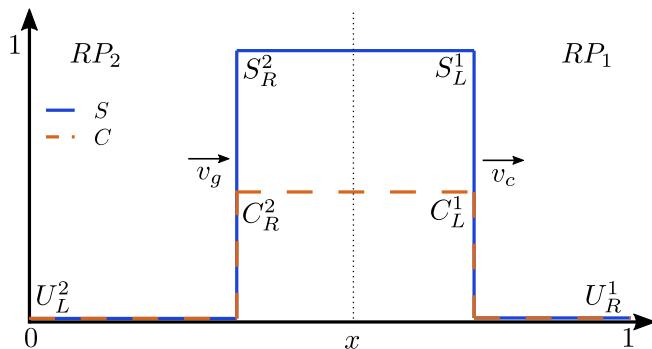


Figura 2: Representação esquemática dos problemas de Riemann  $RP_1$  e  $RP_2$ . Fonte: [9].

da frente do surfactante  $v_c$  é a velocidade do contato de  $RP_1$ . Visamos determinar condições para otimizar o desempenho da espuma e o impacto da adsorção.

Adotando  $S_L^2 = 10^{-3}$ ,  $C_L^2 = 0$ ,  $S_R^2 = S_L^1 = 0.9999$ ,  $C_L^1 = C_R^2 > 0$  e  $C_R^1 = 0$ , a solução de  $RP_2$  é dada por uma sequência de contato, rarefação e choque respectivamente. A velocidade da frente do gás é a velocidade do último choque. Já a imbibição pode ter a solução composta por duas ou três ondas, dependendo da escolha de  $S_R^1$ . Estudando ambos os casos e as respectivas velocidades finais, concluímos que  $S_R^1 = S_L^1$  resulta no cenário em que o encontro da frente do gás e do surfactante é adiado.

Para estudar a melhor concentração de surfactante a ser utilizada, introduzimos o tamanho do banco de surfactante, expresso por:

$$T_{surf} = 1/v_c - 1/v_g. \quad (14)$$

O tamanho do banco de surfactante representa o menor tempo de injeção de água com surfactante necessário para garantir que a frente do gás não ultrapasse a frente do surfactante. O painel esquerdo da Fig. 3 mostra o tamanho do banco de surfactante em função da concentração  $C_L^1$ . Notamos que a redução em  $T_{surf}$  é significativa para valores mais baixos de  $C$ , onde a partir de  $C = 0.2$  não há grandes mudanças. Visando utilizar uma concentração que apresenta uma boa redução no tamanho do banco de surfactante sem grandes adições de custo, adotamos  $C_L^1 = 0.1$ .

Finalmente, investigamos o impacto que a constante de adsorção tem no tamanho do banco de surfactante. O painel direito da Fig. 3 representa o tamanho do banco de surfactante em função de  $K_d^a$  variando de 0 a 1. Aumentar o valor de  $K_d^a$  implica em uma maior quantidade de surfactante adsorvida, reduzindo a concentração de surfactante. Isso resulta em uma alteração da velocidade do gás e do surfactante, que dependem fortemente do valor de  $C$ . Conforme apresentado na Eq. (14), isso resulta na alteração no tamanho do banco de surfactante.

## 7 Conclusões

Motivados pelo deslocamento de espuma em meio porosos com adsorção linear do surfactante, estendemos cenários já existentes para o fluxo bifásico contendo um traçador ativo descrito por um sistema de leis de conservação não estritamente hiperbólico. Resolvemos o problema de Riemann global, obtendo conjuntos onde há perda da unicidade da solução. Investigamos os casos onde a solução não é única, concluindo que o problema é bem-posto. Apesar disso, para parâmetros nos conjuntos onde temos a perda de unicidade, pequenas variações no estado  $U_R$  resulta em

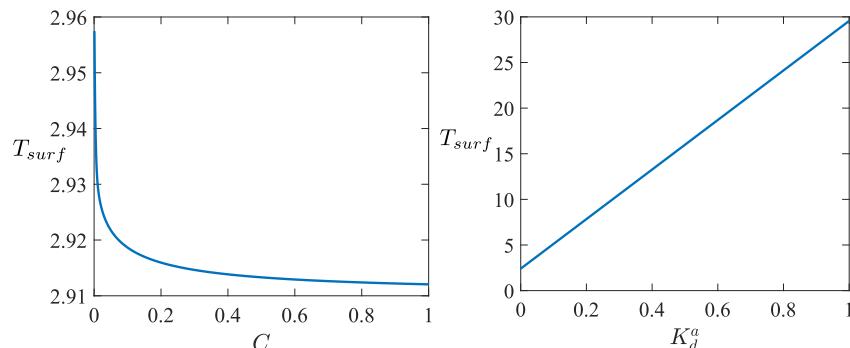


Figura 3: O painel esquerdo apresenta o tamanho do banco de surfactante em função da concentração de surfactante. O painel direito, o tamanho do banco de surfactante em função de  $K_d^a$ .  
Fonte: [9].

soluções qualitativamente diferentes, refletindo a perda de estabilidade estrutural do problema. Verificamos que o modelo implementando no simulador comercial CMG-STARS possui regiões de parâmetros onde as hipóteses adotadas neste trabalho são satisfeitas. Dessa forma, existem regiões de parâmetros onde o modelo do CMG-STARS é estruturalmente instável, podendo resultar em oscilações numéricas. Estudamos o banco de surfactante, composto pela sequência de dois problemas de Riemann. Nossos resultados apontam que o banco de surfactante ótimo é alcançado para baixas concentrações, indicando que o modelo de adsorção linear é adequado nesse cenário [17]. Finalmente, analisamos o impacto da adsorção no banco de surfactante, onde foi possível descrever o tempo de injeção do surfactante em função da constante Henry.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da Shell Brasil através do projeto “Avançando na modelagem matemática e computacional para apoiar a implementação da tecnologia ‘Foam-assisted WAG’ em reservatórios do Pré-sal” (ANP 23518-4) na UFJF e a importância estratégica do apoio dado pela ANP através do regulamento da taxa de P&D. G.C. was partly supported by CNPq grants 306970/2022-8, 405366/2021-3, and FAPEMIG grant APQ-00206-24.

## Referências

- [1] Computer Modeling Group (CMG). **STARS Users Manual**. CMG Ltd Calgary, 2019.
- [2] E. Ashoori, D. Marchesin e W. R. Rossen. “Stability Analysis of Uniform Equilibrium Foam States for EOR Processes”. Em: **Transport in Porous Media** 92.3 (2012), pp. 573–595. DOI: 10.1007/s11242-011-9921-8.
- [3] T. Assis, M. Bispo, Y. Santa Cruz Cardenas, G. Fritis, A. Gutiérrez e G. Chapiro. “Traveling waves for in-situ combustion in porous media”. Em: **Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão** 5 (2020).
- [4] R. H. Brooks e A. T. Corey. **Hydraulic Properties of Porous Media**. Colorado State University Hydrology Paper. Colorado State University, 1964.

- [5] S. E. Buckley e M. Leverett. "Mechanism of fluid displacement in sands". Em: **Transactions of the AIME** 146.01 (1942), pp. 107–116.
- [6] I. Cantat, S. Cohen-Addad, F. Elias, F. Graner, R. Höhler, O. Pitois, F. Rouyer e A. Saint-Jalme. **Foams: structure and dynamics**. OUP Oxford, 2013.
- [7] G. Chapiro, A. A. Mailybaev, A.J. Souza, D. Marchesin e J. Bruining. "Asymptotic approximation of long-time solution for low-temperature filtration combustion". Em: **Comput. Geosciences** 16 (2012), pp. 799–808.
- [8] J. M. F. Façanha, L. F. Lopes, G. Fritis, P. Godoy, R. W. dos Santos, G. Chapiro e A. Perez-Gramatges. "Bubble-growth regime for confined foams: Comparison between  $N_2$ - $CO_2$ /foam and  $CO_2$ /foam stabilized by silica nanoparticles". Em: **Journal of Petroleum Science and Engineering** 218 (2022), p. 111006.
- [9] G. Fritis. "Problema de Riemann para um sistema de leis de conservação não estritamente hiperbólico modelando o deslocamento de espuma". Dissertação de mestrado. UFJF, 2023.
- [10] G. Fritis, L. Lozano e G. Chapiro. "Análise avançada de petróleo usando espumas através de novas ferramentas analíticas". Em: **Rio Oil & Gas Expo And Conference**. 2022.
- [11] G. Fritis, P. Paz, L. Lozano e G. Chapiro. "On the Riemann problem for the foam displacement in porous media with linear adsorption". Em: **SIAM Journal on Applied Mathematics** 84.2 (2024), pp. 581–601.
- [12] G. Fritis, P. Z. S. Paz e G. Chapiro. "Solution construction for a drainage process for a system modeling the foam flow with linear surfactant adsorption". Em: **XLIII CILAMCE**. 2022.
- [13] F. Furtado. "Structural Stability of Nonlinear Waves for Conservation Laws". Tese de doutorado. New York University, 1989.
- [14] E. L. Isaacson. **Global solution of the Riemann problem for a non-strictly hyperbolic system of conservation laws arising in enhanced oil recovery**. Rel. técn. Rockefeller University, 1981.
- [15] E. L. Isaacson e J. B. Temple. "Analysis of a singular hyperbolic system of conservation laws". Em: **Journal of Differential Equations** 65.2 (1986), pp. 250–268.
- [16] T. Johansen e R. Winther. "The solution of the Riemann problem for a hyperbolic system of conservation laws modeling polymer flooding". Em: **SIAM Journal on Mathematical Analysis** 19.3 (1988), pp. 541–566. DOI: 10.1137/0519039.
- [17] S. Kalam, S. A. Abu-Khamsin, M. S. Kamal e S. Patil. "Surfactant adsorption isotherms: A review". Em: **ACS omega** 6.48 (2021), pp. 32342–32348.
- [18] S. I. Kam. "Improved mechanistic foam simulation with foam catastrophe theory". Em: **Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects** 318.1 (2008), pp. 62–77. ISSN: 0927-7757. DOI: 10.1016/j.colsurfa.2007.12.017.
- [19] L. Lake. **Enhanced oil recovery**. New Jersey: Prentice Hall, 1989.
- [20] S. Schechter, D. Marchesin e B. J. Plohr. "Structurally stable Riemann solutions". Em: **Journal of Differential Equations** 126.2 (1996), pp. 303–354.