Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Convergência Compacta de Operadores

Patrícia Neves de Araújo[1]
IFSP, São Paulo, SP

Resumo. Neste trabalho estudamos propriedades de operadores com resolvente compacto. Com base na teoria da convergência compacta, analisamos condições que garantem a limitação do operador resolvente, a convergência de certas famílias de operadores e uma estimativa para a diferença entre operadores resolventes em diferentes contextos, sob hipóteses específicas.

Palavras-chave. Convergência compacta de operadores. Operadores perturbados. Operadores com resolvente compacto.

1 Introdução

Neste trabalho estudamos uma família de espaços de Hilbert $\{X_\varepsilon\}$, para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Denotamos por $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}$ uma família geral de operadores tais que, para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $A_\varepsilon : D(A_\varepsilon) \subset X_\varepsilon \to X_\varepsilon$ é autoadjunto, positivo e tem resolvente compacto.

Esta família de operadores pode surgir em diversos contextos. Em [1], a motivação para a análise destes operadores é o estudo da convergência da família de soluções $u^\varepsilon \in H^1(R^\varepsilon)$ do problema

$$\int_{R^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v + \beta uv = \int_{R^\varepsilon} f(u^\varepsilon)v \text{ para todo } v \in H^1(R^\varepsilon),\ \varepsilon > 0, \tag{1}$$

no domínio fino

$$R^\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{1+n} : x \in (0, 1), y \in \varepsilon a(x)B_1\}, \tag{2}$$

onde B_1 é a bola unitária com centro na origem em $\mathbb{R}^n$. A função $a : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, $a(0) = 0$ e $a(x) > 0$ se $x \in (0, 1]$. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e satisfaz $|f(u)| + |f'(u)| + |f''(u)| \leq K$ para alguma constante $K > 0$ e para todo $u \in \mathbb{R}$.

As provas apresentadas são análogas às demonstradas em [2] e [3]. Em [3], são provados resultados para uma família de espaços de Hilbert $\{X_\varepsilon\}$, para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, e os operadores considerados são tais que A_ε é autoadjunto, positivo e possui resolvente compacto, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Considera-se que o operador $A_0 : D(A_0) \subset X_0 \to X_0$ está definido em um espaço X_0 de dimensão finita. Neste trabalho detalhamos a demonstração de alguns detalhes.

Denotamos por

$$\sigma(A_\varepsilon) = \{\lambda_1^\varepsilon, \lambda_2^\varepsilon, \cdots\} \tag{3}$$

o espectro do operador A_ε com $0 < \lambda_1^\varepsilon \leq \lambda_2^\varepsilon \leq \cdots \leq \lambda_n^\varepsilon \leq \cdots$.

Observação 1.1. $\lambda_n^\varepsilon \to +\infty$ *quando* $n \to \infty$ *porque* A_ε *possui resolvente compacto.*

Em decorrência das propriedades de A_ε, o espectro é formado apenas pelos autovalores do operador, isto é, o espectro pontual de A_ε (ver [4], p. 248). Considere uma família ortonormal $\{\varphi_j^\varepsilon\}_{j=1}^\infty$ de autofunções do operador A_ε associada a $\{\lambda_j^\varepsilon\}_{j=1}^\infty$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, denotamos por

[1] patricia.p.n.araujo@gmail.com

Q_j^ε a projeção ortogonal sobre o subespaço gerado span$[\varphi_1^\varepsilon, \cdots, \varphi_j^\varepsilon]$. Com isto, de acordo com [5], para todo $\alpha \in [0,1]$, o operador $A_\varepsilon^\alpha : D(A_\varepsilon^\alpha) \subset X_\varepsilon \to X_\varepsilon$ é dado por

$$A_\varepsilon^\alpha u = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^\varepsilon)^\alpha Q_j^\varepsilon u \text{ para todo } u \in D(A_\varepsilon), \tag{4}$$

$$D(A_\varepsilon^\alpha) = \left\{ u \in X_\varepsilon : \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^\varepsilon)^{2\alpha} ||Q_j^\varepsilon u||_{X_\varepsilon}^2 < \infty \right\}. \tag{5}$$

A cada operador A_ε associamos a família de espaços de potências fracionárias $\{X_\varepsilon^\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ definida por $X_\varepsilon^\alpha = D(A_\varepsilon^\alpha)$. O operador A_ε^α é positivo e autoadjunto, X_ε^α é um espaço de Hilbert com o produto interno $< u, v >_{X_\varepsilon^\alpha} = < A_\varepsilon^\alpha u, A_\varepsilon^\alpha v >_{X_\varepsilon}$ e norma definida por

$$||u||_{X_\varepsilon^\alpha} = ||A_\varepsilon^\alpha u||_{X_\varepsilon} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^\varepsilon)^{2\alpha} ||Q_j^\varepsilon u||_{X_\varepsilon}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Observamos que, dependendo das propriedades do operador e do domínio, a escala de espaços de potências fracionárias pode variar. Por exemplo, no caso estudado em [1], o espaço X_ε^0 corresponde a $H^1(R^\varepsilon)$.

Assumimos que, para algum $\alpha \in [0,1]$ fixado, existem duas famílias de operadores lineares $E_\varepsilon^\alpha : X_0^\alpha \to X_\varepsilon^\alpha$ e $M_\varepsilon^\alpha : X_\varepsilon^\alpha \to X_0^\alpha$, com $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, tais que

- (P1) $M_\varepsilon^\alpha \circ E_\varepsilon^\alpha = I_{X_0^\alpha}$,
- (P2) $||E_\varepsilon^\alpha u||_{X_\varepsilon^\alpha} \to ||u||_{X_0^\alpha}$ quando $\varepsilon \to 0$,
- (P3) $||E_\varepsilon^\alpha||_{\mathcal{L}(X_0^\alpha, X_\varepsilon^\alpha)}$, $||M_\varepsilon^\alpha||_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^\alpha, X_0^\alpha)} \le C$, onde $C > 0$ é uma constante independente de ε.

Desta forma E_ε^α é injetor e M_ε^α é sobrejetor. Além disso

$$C^{-1}||u||_{X_0^\alpha} \le ||E_\varepsilon^\alpha u||_{X_\varepsilon^\alpha} \le C||u||_{X_0^\alpha} \tag{7}$$

para qualquer $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

1.1 Convergência Compacta

Utilizaremos os seguintes conceitos referentes à convergência de operadores.

Definição 1.1. *Uma sequência $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$, com $u^\varepsilon \in X_\varepsilon^\alpha$, é dita $E-$convergente para uma função $u \in X_0^\alpha$ se $||u^\varepsilon - E_\varepsilon^\alpha u||_{X_\varepsilon^\alpha} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Denotamos por $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u$.*

Definição 1.2. *Considere uma sequência $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, com $u_n \in X_{\varepsilon_n}^\alpha$, é chamada $E-$relativamente compacta se para cada subsequência $\{u_{n'}\}$ existe outra subsequência $\{u_{n''}\}$ e um elemento $u \in X_0^\alpha$ tal que $u_{n''} \xrightarrow{E} u$. Uma família $\{u^\varepsilon\}$, onde $u^\varepsilon \in X_\varepsilon^\alpha$, é dita $E-$relativamente compacta se cada subsequência $\{u_n\}$, com $u_n \in X_{\varepsilon_n}^\alpha$ e $\varepsilon_n \to 0$, é $E-$relativamente compacta.*

Definição 1.3. *Dizemos que uma família de operadores $\{B_\varepsilon : D(B_\varepsilon) \subset X_\varepsilon \to X_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ converge para $B_0 : D(B_0) \subset X_0 \to X_0$ quando $\varepsilon \to 0$ se $B_\varepsilon u^\varepsilon \xrightarrow{E} B_0 u$ sempre que $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u \in X_0^\alpha$. Denotamos por $B_\varepsilon \xrightarrow{EE} B_0$.*

Definição 1.4. *Dizemos que uma família de operadores compactos* $\{B_\varepsilon : D(B_\varepsilon) \subset X_\varepsilon \to X_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[0,1]}$ *converge compactamente para um operador* $B_0 : D(B_0) \subset X_0 \to X_0$ *se para cada família* $\{u^\varepsilon\}$*, com* $||u^\varepsilon||_{X^\alpha_\varepsilon} \le 1$*, a família* $\{B_\varepsilon u^\varepsilon\}$ *é* $E-$*relativamente compacta e* $B_\varepsilon \xrightarrow{EE} B_0$*. Escrevemos* $B_\varepsilon \xrightarrow{CC} B_0$.

Lema 1.1. *Fixe* $\alpha \in [0,1]$ *e assuma que* $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$*. Valem as afirmações*

- $||A_\varepsilon^{-1}||_{\mathcal{L}(X^\alpha_\varepsilon)} \le C_1$ *para alguma constante* $C_1 > 0$ *independente de* ε*.*
- *Dado um conjunto compacto* $K \subset \rho(-A_0)$*, temos que* $K \subset \rho(-A_\varepsilon)$ *para* ε *suficientemente pequeno e*
$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]} \sup_{\lambda\in K} ||(\lambda + A_\varepsilon)^{-1}||_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X^\alpha_\varepsilon)} \le C_2 \tag{8}$$
para alguma constante C_2 *independente de* ε*. Além disso,*
$$(\lambda + A_\varepsilon)^{-1} \xrightarrow{CC} (\lambda + A_0)^{-1}. \tag{9}$$

Demonstração. Se a primeira afirmação não é válida, podemos supor que existem sequências $\varepsilon_k \to 0$ e $\{u^{\varepsilon_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $u^{\varepsilon_k} \in X^\alpha_{\varepsilon_k}$ tais que $||u^{\varepsilon_k}||_{X^\alpha_{\varepsilon_k}} = 1$ e $||A^{-1}_{\varepsilon_k} u^{\varepsilon_k}||_{X^\alpha_{\varepsilon_k}} \to \infty$ quando $k \to \infty$. Desta forma, temos que $\{A^{-1}_{\varepsilon_k} u^{\varepsilon_k}\}$ não pode ser $E-$relativamente compacta, o que contradiz a hipótese de que $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$. Portanto $||A_\varepsilon^{-1}||_{\mathcal{L}(X^\alpha_\varepsilon)} \le C_1$.

Suponha agora que o segundo resultado não é válido. Assim, existe sequência $\varepsilon_n \to 0$ tal que $\sigma(-A_{\varepsilon_n}) \cap K \ne \emptyset$. Portanto, podemos tomar $\lambda_n \in \sigma(-A_{\varepsilon_n}) \cap K$ tal que $\lambda_n \to \lambda \in K$, e um elemento $u^{\varepsilon_n} \in X_{\varepsilon_n}$ com $||u^{\varepsilon_n}||_{X^\alpha_{\varepsilon_n}} = 1$ tal que $u^{\varepsilon_n} = -\lambda_n A^{-1}_{\varepsilon_n} u^{\varepsilon_n}$. Como $||u^{\varepsilon_n}||_{X^\alpha_{\varepsilon_n}} = 1$, a família $\{A^{-1}_{\varepsilon_n} u^{\varepsilon_n}\}$ é $E-$relativamente compacta. Portanto, existe subsequência, que podemos denotar por $\{\varepsilon_n\}$, tal que $A^{-1}_{\varepsilon_n} u^{\varepsilon_n} \xrightarrow{E} u^0$ para algum $u^0 \in X^\alpha_0$.

Se $\lambda = 0$, então
$$||u^{\varepsilon_n}||_{X^\alpha_{\varepsilon_n}} = ||-\lambda_n A^{-1}_{\varepsilon_n} u^{\varepsilon_n}||_{X^\alpha_{\varepsilon_n}} \le |\lambda_n| C_1 \to 0 \tag{10}$$
quando $n \to \infty$, de onde obtemos um absurdo, pois $||u^{\varepsilon_n}||_{X^\alpha_{\varepsilon_n}} = 1$.

Suponha que $\lambda \ne 0$. Como $\lambda_n \to \lambda$, vemos que $-\lambda_n A^{-1}_{\varepsilon_n} u^{\varepsilon_n} \xrightarrow{E} -\lambda u^0$. Com isto temos que $u^{\varepsilon_n} \xrightarrow{E} -\lambda u^0$ e, pela convergência compacta, $A^{-1}_{\varepsilon_n} u^{\varepsilon_n} \xrightarrow{E} A_0^{-1}(-\lambda u^0)$, de onde concluímos que
$$-\lambda_{\varepsilon_n} A^{-1}_{\varepsilon_n} u^{\varepsilon_n} \xrightarrow{E} -\lambda A_0^{-1}(-\lambda u^0), \tag{11}$$
e assim
$$-\lambda u^0 = -\lambda A_0^{-1}(-\lambda u^0) \Rightarrow -A_0 u^0 = \lambda u^0. \tag{12}$$

Desta forma $\lambda \in K \cap \sigma(-A_0)$, o que é absurdo. Logo $K \subset \rho(-A_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, para algum $\varepsilon_0 > 0$.

Para provar a estimativa (8), note que, se $\lambda = 0$, o resultado é válido em decorrência do primeiro item.

Considere então $\lambda \ne 0$ e suponha que não existe $C > 0$ tal que
$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]} \sup_{\lambda\in K} ||(\lambda + A_\varepsilon)^{-1}||_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X^\alpha_\varepsilon)} \le C. \tag{13}$$

Vamos provar que, para todo ε suficiente pequeno,
$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]} \sup_{\lambda\in K} ||(I + \lambda A_\varepsilon^{-1})^{-1}||_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X^\alpha_\varepsilon)} \le C. \tag{14}$$

Observe que

$$(\lambda + A_\varepsilon) = A_\varepsilon(I + \lambda A_\varepsilon^{-1}), \tag{15}$$

logo

$$A_\varepsilon^{-1}(\lambda + A_\varepsilon) = (I + \lambda A_\varepsilon^{-1}) \tag{16}$$

e assim

$$(I + \lambda A_\varepsilon^{-1})^{-1} = (\lambda + A_\varepsilon)^{-1} A_\varepsilon. \tag{17}$$

Portanto existe $(I + \lambda A_\varepsilon^{-1})^{-1}$ e assim $\mathrm{Ker}(I + \lambda A_\varepsilon^{-1}) = \{0\}$. Pela alternativa de Fredholm para operadores compactos, temos que $\mathrm{Im}(I + \lambda A_\varepsilon^{-1}) = X_\varepsilon^\alpha$. Assim, basta provar que existem $C > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que, para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$,

$$||(I + \lambda A_\varepsilon^{-1})u^\varepsilon||_{X_\varepsilon^\alpha} \geq \frac{1}{C} \text{ para todo } u^\varepsilon \in X_\varepsilon^\alpha \text{ com } ||u^\varepsilon||_{X_\varepsilon^\alpha} = 1. \tag{18}$$

Se isto não ocorre, então para todo $m \in \mathbb{N}$ existe u^{ε_m}, com $||u^{\varepsilon_m}||_{X_{\varepsilon_m}^\alpha} = 1$, $\varepsilon_m \to 0$, tal que $||(I + \lambda A_{\varepsilon_m}^{-1})u^{\varepsilon_m}||_{X_{\varepsilon_m}^\alpha} \leq \dfrac{1}{m}$. Pela convergência compacta, sabemos que existe subsequência tal que $A_{\varepsilon_m}^{-1} u^{\varepsilon_m} \xrightarrow{E} v$ e portanto $\lambda A_{\varepsilon_m}^{-1} u^{\varepsilon_m} \xrightarrow{E} \lambda v$. Note que

$$||u^{\varepsilon_m} + \lambda E_\varepsilon^\alpha v||_{X_\varepsilon^\alpha} \leq ||u^{\varepsilon_m} + \lambda A_{\varepsilon_m}^{-1} u^{\varepsilon_m}||_{X_\varepsilon^\alpha} + ||(-1)(\lambda A_{\varepsilon_m}^{-1} u^{\varepsilon_m} - \lambda E_\varepsilon^\alpha v)||_{X_\varepsilon^\alpha}. \tag{19}$$

Dado $\delta > 0$, podemos tomar m_1 de modo que a primeira parcela seja inferior a $\frac{\delta}{2}$ para todo $m \geq m_1$. Da $E-$convergência sabemos que existe m_2 tal que a segunda parcela também é inferior a $\frac{\delta}{2}$ para todo $m \geq m_2$. Portanto

$$||u^{\varepsilon_m} + \lambda E_\varepsilon^\alpha v||_{X_\varepsilon^\alpha} \leq \delta \tag{20}$$

para todo $m \geq \max\{m_1, m_2\}$. Com isto concluímos que $u^{\varepsilon_m} \xrightarrow{E} -\lambda v$. Daí

$$\lambda A_0^{-1}(-\lambda v) = \lambda v \Rightarrow -A_0 v = \lambda v, \tag{21}$$

o que não pode ocorrer uma vez que $\lambda \in K \subset \rho(-A_0)$.

Portanto existe ε_0 tal que, para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$,

$$||(\lambda + A_\varepsilon)^{-1}||_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^\alpha)} \leq ||(I + \lambda A_\varepsilon^{-1})^{-1}||_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon^\alpha)} ||A_\varepsilon^{-1}||_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^\alpha)} \leq C. \tag{22}$$

Para provar que $(\lambda + A_\varepsilon)^{-1}$ converge compactamente para $(\lambda + A_0)^{-1}$, tome uma sequência $\{u^\varepsilon\}$ tal que $||u^\varepsilon||_{X_\varepsilon^\alpha} \leq 1$ e denote $v^\varepsilon = (I + \lambda A_\varepsilon^{-1})^{-1} u^\varepsilon$. Desta forma,
$(\lambda + A_\varepsilon)^{-1} u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} v^\varepsilon$. De fato, basta observar que

$$\begin{aligned}(\lambda + A_\varepsilon)(A_\varepsilon^{-1}(I + \lambda A_\varepsilon^{-1})^{-1}) &= \lambda A_\varepsilon^{-1}(I + \lambda A_\varepsilon^{-1})^{-1} + (I + \lambda A_\varepsilon^{-1})^{-1} \\ &= (I + \lambda A_\varepsilon^{-1})(I + \lambda A_\varepsilon^{-1})^{-1} = I.\end{aligned} \tag{23}$$

Como u^ε e $(I + \lambda A_\varepsilon^{-1})^{-1}$ são limitados, temos que $\{v^\varepsilon\}$ é limitado. Podemos então assumir que

$$(\lambda + A_\varepsilon)^{-1} u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} v^\varepsilon \xrightarrow{E} v^0 \tag{24}$$

tomando subsequência se necessário. Isso ocorre porque $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$ e isso implica que a sequência $\{A_\varepsilon^{-1} v^\varepsilon\}$ é $E-$relativamente compacta.

Seja

$$z^\varepsilon = (I + \lambda A_\varepsilon^{-1})^{-1} A_\varepsilon^{-1} u^\varepsilon. \tag{25}$$

Observe que

$$(I+\lambda A_\varepsilon^{-1})^{-1}A_\varepsilon^{-1}=(A_\varepsilon(I+\lambda A_\varepsilon^{-1}))^{-1}=(A_\varepsilon+\lambda)^{-1}, \tag{26}$$

logo

$$z^\varepsilon=(I+\lambda A_\varepsilon^{-1})^{-1}A_\varepsilon^{-1}u^\varepsilon=(\lambda+A_\varepsilon)^{-1}u^\varepsilon \xrightarrow{E} v^0. \tag{27}$$

Se $u^\varepsilon \xrightarrow{E} u^0$, sabemos que $A_\varepsilon^{-1}u^\varepsilon \xrightarrow{E} A_0^{-1}u^0$. Por outro lado,

$$A_\varepsilon^{-1}u^\varepsilon=(I+\lambda A_\varepsilon^{-1})z^\varepsilon \xrightarrow{E} v^0+\lambda A_0^{-1}v^0=(I+\lambda A_0^{-1})v^0. \tag{28}$$

Desta forma $A_0^{-1}u^0=(I+\lambda A_0^{-1})v^0 \Rightarrow v^0=(\lambda+A_0)^{-1}u^0$ e está provada a convergência compacta. □

Fixando $\alpha\in[0,1]$, suponha que $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{CC} A_0^{-1}$ e que existe função positiva e crescente $\tau:[0,\varepsilon_0]\to[0,\infty)$ tal que $\tau(0)=0$ e

$$||A_\varepsilon^{-1}-E_\varepsilon^\alpha A_0^{-1}M_\varepsilon^\alpha||_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X_\varepsilon^\alpha)}\le\tau(\varepsilon). \tag{29}$$

Lema 1.2. *Se $\lambda\in\rho(-A_\varepsilon)$ é tal que $\lambda\notin(-\infty,-\lambda_1^0]$, então existe $\phi\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ tal que*

$$\lambda\in\Sigma_{\lambda_1^0,\phi}\backslash B_r(-\lambda_1^0)=\{\mu\in\mathbb{C}:|arg(\mu+\lambda_1^0)|\le\phi\}\backslash\{\mu\in\mathbb{C}:|\mu+\lambda_1^0|\le r\} \tag{30}$$

para algum $r>0$ pequeno. Além disso, se $K\subset\rho(-A_\varepsilon)$ é um compacto, vale a estimativa

$$||(\lambda+A_\varepsilon)^{-1}-E_\varepsilon^\alpha(\lambda+A_0)^{-1}M_\varepsilon^\alpha||_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X_\varepsilon^\alpha)}\le C\tau(\varepsilon) \text{ para todo } \lambda\in K, \tag{31}$$

onde $C>0$ é uma constante independente de ε.

Demonstração. Provaremos que

$$\begin{aligned}&A_\varepsilon^\alpha((A_\varepsilon+\lambda)^{-1}-E_\varepsilon^\alpha(A_0+\lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha)\\=&A_\varepsilon(A_\varepsilon+\lambda)^{-1}A_\varepsilon^\alpha(A_\varepsilon^{-1}-E_\varepsilon^\alpha A_0^{-1}M_\varepsilon^\alpha)(I-E_\varepsilon^\alpha\lambda(A_0+\lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha).\end{aligned} \tag{32}$$

Primeiramente, reescrevemos a igualdade como

$$\begin{aligned}&A_\varepsilon^\alpha((A_\varepsilon+\lambda)^{-1}-E_\varepsilon^\alpha(A_0+\lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha)\\=&(I-\lambda(A_\varepsilon+\lambda)^{-1})A_\varepsilon^\alpha(A_\varepsilon^{-1}-E_\varepsilon^\alpha A_0^{-1}M_\varepsilon^\alpha)(I-E_\varepsilon^\alpha\lambda(A_0+\lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha).\end{aligned} \tag{33}$$

Note que

$$\begin{aligned}&(I+\lambda A_\varepsilon^{-1})(I-\lambda(A_\varepsilon+\lambda)^{-1})\\=&I-\lambda(A_\varepsilon+\lambda)^{-1}+\lambda A_\varepsilon^{-1}(I-\lambda(A_\varepsilon+\lambda)^{-1})\\=&A_\varepsilon(A_\varepsilon+\lambda)^{-1}+\lambda A_\varepsilon^{-1}(I-\lambda(A_\varepsilon+\lambda)^{-1})\\=&A_\varepsilon(A_\varepsilon+\lambda)^{-1}+\lambda(A_\varepsilon+\lambda)^{-1}=I.\end{aligned} \tag{34}$$

Portanto a propriedade (32) vale se e somente se

$$\begin{aligned}&(I+\lambda A_\varepsilon^{-1})A_\varepsilon^\alpha((A_\varepsilon+\lambda)^{-1}-E_\varepsilon^\alpha(A_0+\lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha)\\=&A_\varepsilon^\alpha(A_\varepsilon^{-1}-E_\varepsilon^\alpha A_0^{-1}M_\varepsilon^\alpha)(I-E_\varepsilon^\alpha\lambda(A_0+\lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha).\end{aligned} \tag{35}$$

Por ([5], seção 1.4), temos que $A_\varepsilon^\alpha A_\varepsilon=A_\varepsilon A_\varepsilon^\alpha$ na intersecção dos domínios dos operadores. Desta forma

$$A_\varepsilon^{-1}A_\varepsilon^\alpha=A_\varepsilon^\alpha A_\varepsilon^{-1}. \tag{36}$$

Para o lado esquerdo da igualdade (35) utilizamos

$$I + \lambda A_\varepsilon^{-1} = A_\varepsilon^{-1}(A_\varepsilon + \lambda) \tag{37}$$

para escrever

$$\begin{aligned}
&(I + \lambda A_\varepsilon^{-1})A_\varepsilon^\alpha((A_\varepsilon + \lambda)^{-1} - E_\varepsilon^\alpha(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha) \\
=&A_\varepsilon^{-1}(A_\varepsilon + \lambda)A_\varepsilon^\alpha[(A_\varepsilon + \lambda)^{-1} - E_\varepsilon^\alpha(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha] \\
=&A_\varepsilon^{-1}A_\varepsilon^\alpha - A_\varepsilon^{-1}(A_\varepsilon + \lambda)A_\varepsilon^\alpha E_\varepsilon^\alpha(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha \\
=&A_\varepsilon^{-1}A_\varepsilon^\alpha - A_\varepsilon^\alpha E_\varepsilon^\alpha(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha - A_\varepsilon^{-1}\lambda A_\varepsilon^\alpha E_\varepsilon^\alpha(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha.
\end{aligned} \tag{38}$$

Desenvolvendo o lado direito da igualdade (35) obtemos

$$\begin{aligned}
&A_\varepsilon^\alpha(A_\varepsilon^{-1} - E_\varepsilon^\alpha A_0^{-1}M_\varepsilon^\alpha)(I - E_\varepsilon^\alpha\lambda(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha) \\
=&A_\varepsilon^\alpha A_\varepsilon^{-1} - A_\varepsilon^\alpha E_\varepsilon^\alpha A_0^{-1}M_\varepsilon^\alpha - A_\varepsilon^\alpha A_\varepsilon^{-1}E_\varepsilon^\alpha\lambda(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha + A_\varepsilon^\alpha E_\varepsilon^\alpha A_0^{-1}\lambda(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha \\
=&A_\varepsilon^\alpha A_\varepsilon^{-1} - A_\varepsilon^\alpha E_\varepsilon^\alpha A_0^{-1}M_\varepsilon^\alpha - A_\varepsilon^\alpha A_\varepsilon^{-1}E_\varepsilon^\alpha\lambda(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha + A_\varepsilon^\alpha E_\varepsilon^\alpha A_0^{-1}(I - A_0(A_0 + \lambda)^{-1})M_\varepsilon^\alpha \\
=&A_\varepsilon^\alpha A_\varepsilon^{-1} - A_\varepsilon^\alpha A_\varepsilon^{-1}E_\varepsilon^\alpha\lambda(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha - A_\varepsilon^\alpha E_\varepsilon^\alpha A_0^{-1}(I - I + A_0(A_0 + \lambda)^{-1})M_\varepsilon^\alpha \\
=&A_\varepsilon^\alpha A_\varepsilon^{-1} - A_\varepsilon^\alpha A_\varepsilon^{-1}E_\varepsilon^\alpha\lambda(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha - A_\varepsilon^\alpha E_\varepsilon^\alpha(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha \\
=&A_\varepsilon^{-1}A_\varepsilon^\alpha - A_\varepsilon^\alpha E_\varepsilon^\alpha(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha - A_\varepsilon^{-1}\lambda A_\varepsilon^\alpha E_\varepsilon^\alpha(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha.
\end{aligned} \tag{39}$$

Portanto a igualdade (35) é válida e a desigualdade segue da limitação uniforme de $||(A_\varepsilon + \lambda)^{-1}||_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)}$, $||E_\varepsilon^\alpha\lambda(A_0 + \lambda)^{-1}M_\varepsilon^\alpha||_{\mathcal{L}(X_\varepsilon)}$ para λ em compactos, e da propriedade (29). $\square$

2 Considerações Finais

Neste trabalho vimos que, sob hipóteses adequadas a respeito de uma família de operadores, podemos provar a convergência compacta de seus resolventes. Vimos também que a convergência compacta dos resolventes nos permite verificar que o operador limite preserva propriedades do restante da família. Por fim, este estudo pode ser utilizado para obter informações sobre soluções de problemas elípticos em domínios perturbados, entre outras aplicações.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

[1] P. N. de Araújo. "Problemas elípticos semilineares em domínios finos definidos por funções não negativas". Tese de doutorado. USP, 2024.

[2] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho e G. Lozada-Cruz. "Dynamics in dumbbell domains I. Continuity of the set of equilibria". Em: **Journal of Differential Equations** 231.2 (2006), pp. 551–597. DOI: `http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2006.06.002`.

[3] A. N. Carvalho e L. Pires. "Rate of convergence of attractors for singularly perturbed semilinear problems". Em: **Journal of Mathematical Analysis and Applications** 452.1 (2017), pp. 258–296. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.03.008`.

[4] K. J. Engel et al. **One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations**. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2006. ISBN: 9780387226422.

[5] D. Henry. **Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations**. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1981. ISBN: 9780387105574.

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0266