Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Passeios Aleatórios em Redes Elétricas

Maria Mariana A. França[1]
DE/UFPE, Recife, PE

O passeio aleatório foi um dos primeiros processos aleatórios estudados em probabilidade; este processo casual continua a desempenhar um papel importante na teoria da probabilidade e suas aplicações.

Como feito em [2], existe uma correspondência notável, mas facilmente estabelecida, entre redes elétricas e passeios aleatórios em grafos (ou em redes). Ou seja, dado um grafo conectado finito G com condutâncias (ou seja, números positivos) atribuídas às arestas, consideramos o passeio aleatório que pode ir de um vértice apenas para um vértice adjacente e cujas probabilidades de transição de um vértice são proporcionais às condutâncias ao longo das arestas a serem obtidas. Seja x um vértice com $y_1, \cdots y_d$ vizinhos e as condutâncias da aresta (x, y_i) é c_i, então as probabilidades de transição de x para y_j é $p(x, y_j) := c_j / \sum_{i=1}^{d} c_i$.

Agora consideremos dois vértices fixados a_0 e a_i de G. A função tensão nos vértices é uma função tal que $v(a_i) = i$ para $i = 0, 1$ e para todos os outros vértices $x \neq a_0, a_1$ a equação

$$v(x) \sum_{i=1}^{d} c_i = \sum_{i=1}^{d} c_i v(y_i) \tag{1}$$

é válida.

Proposição 1. *Para cada vértice x, a tensão em x é igual a probabilidade de quando o passeio aleatório correspondente começar em x ela visitará a_1 antes de visitar a_0.*

A tensão em x é a probabilidade de que o passeio aleatório viste o nível N antes de visitar a raiz, quando começa a partir de x.

Usaremos o termo **árvore** para denotar um grafo conectado contável com um vértice distinto chamado **raiz** que não tem loops ou ciclos e que é localmente finito, ou seja, cada vértice pertence apenas a um número de arestas. Nós denotaremos a raiz por 0 e geralmente consideraremos a árvore como um grafo direcionado, em que as arestas estão em direção oposta a 0.

Definição 1. *O número de ramificações de uma árvore $br\Gamma$ é definido por:*

$$br\Gamma = \inf \left\{ \lambda > 0 : \liminf_{\Pi \to \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 0 \right\} \tag{2}$$

$$= \sup \left\{ \lambda > 0 : \liminf_{\Pi \to \infty} \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = \infty \right\} \tag{3}$$

$$= \inf \left\{ \lambda > 0 : \inf \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} = 0 \right\} \tag{4}$$

[1]mariana.afranca2@ufpe.br

Teorema 1. *([1]) Seja Γ uma árvore. Quando $\lambda < br\Gamma$, o passeio aleatório associado é transiente, quando $\lambda > br\Gamma$ é recorrente. Correspondentemente, a corrente flui quando $\lambda < br\Gamma$ mas não flui quando $\lambda > br\Gamma$.*

Este terorema é intuitivo? Consideremos um vértice diferente da raiz com, digamos, d filhos. Se nós considerarmos apenas a distância de 0, que aumenta ou diminui a cada passo do passeio aleatório, um equilíbrio neste vértice entre crescente e decrescente ocorre quando $\lambda = d$. Se d é constante, então a distância da raiz sofre um passeio aleatório com um viés constante (para um λ fixo), então é fácil ver que de fato d é o valor crítico que separa a transitoriedade de recorrência. O que o Teorema anterior nos diz é que esta mesma heurística pode ser usada no caso geral, desde que substituamos o $br\Gamma$ "médio" por d.

Neste trabalho estudamos os argumentos desenvolvidos em [1] para provar o Teorema anterior e discutimos algumas de suas aplicações. Isto será feito através do entendimento e análise da conexão entre passeios aleatórios e redes elêtricas como desenvolvido em [2].

Agradecimentos

Este trabalho é parte da Dissertação de Mestrado em Estatística da autora sob orientação do prof. Pablo Rodriguez (UFPE). O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

[1] R. Lyons. "Random walks and percolation on trees". Em: **The Annals of Probability** 18.3 (1990), pp. 931–958. DOI: 10.1214/aop/1176990730.

[2] R. Lyons e Y. Peres. **Probability on trees and networks**. Vol. 42. Cambridge University Press, 2017.

