

Geometria Hiperbólica Plana e Construções Geométricas com o Software Noneuclid

Farley F. Santana¹; Mateus B. Guimarães²; Éllen M. M. Fernandes³
Mayara S. Miranda⁴.

IF Sudeste MG, Campus Juiz de Fora

Historicamente, a geometria hiperbólica desenvolveu-se no século XIX, a partir do trabalho de matemáticos como N. Lobachevsky, J. Bolyai e C. F. Gauss, que começaram a explorar alternativas à Geometria Euclidiana. Eles questionaram a necessidade do quinto postulado de Euclides, conhecido como postulado das paralelas, e consideraram que outras geometrias poderiam ser construídas ao negar essa suposição. Neste trabalho, exploramos os teoremas da geometria hiperbólica plana a partir do modelo do disco de Poincaré e, utilizando o software livre Noneuclid [3], propomos construções geométricas dos resultados como atividades de apoio à aprendizagem de alunos de graduação em matemática. O referencial teórico foi construído a partir das referências [1], [2], [4] e [5]. Segue um exemplo sobre a construção de retas paralelas.

Proposição 1. *Sejam r uma reta e P um ponto não pertencente a r . Consideremos:*

C_1 : conjunto das retas que passam por P e não intersectam r ;

C_2 : conjunto das retas que passam por P e intersectam r .

Então, existem exatamente duas retas distintas s e s' de C_1 que determinam no plano hiperbólico dois pares S_1 e S_2 de setores angulares opostos pelo vértice P de tal modo que $C_1 \subset S_1$ e $C_2 \subset S_2$.

Demonstração. Veja [2]. □

Exemplo 1. *Devido à infinidade de retas que passam por P e não intersectam r , podemos definir retas paralelas na geometria hiperbólica como:*

Definição 1. *Sejam r uma reta e P um ponto não pertencente a r . Às retas s e s' da Proposição 1, chamamos de retas paralelas a r por P , enquanto que as demais retas que passam por P e não intersectam r chamamos de retas hiperparalelas a r por P .*

Proposição 2. *Sejam r uma reta e P um ponto não pertencente a r . Então, as duas retas paralelas a r pelo ponto P determinam ângulos congruentes com o segmento perpendicular à reta r baixado de P . Além disso, os ângulos congruentes mencionados são agudos.*

Demonstração. Veja [2]. □

Exemplo 2. *Vamos representar a construção das paralelas no software Noneuclid com a sequência de comandos:*

- *Constructions* \rightarrow Draw Line (Criamos as retas \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{BC});

¹farley.santana@ifsudestemg.edu.br

²mateus.guimaraes@ifsudestemg.edu.br

³ellenfern69@gmail.com

⁴mirandamayara596@gmail.com

- *Edit* → *Move Point* (Movemos os pontos B e C para o bordo, tornando-os pontos ideais);
- *Constructions* → *Draw perpendicular* (Criamos a reta \overleftrightarrow{AD} , perpendicular à reta \overleftrightarrow{BC});
- *Measurements* → *Measure angle* (Verificamos que os ângulos \widehat{BAD} e \widehat{DAC} são congruentes).

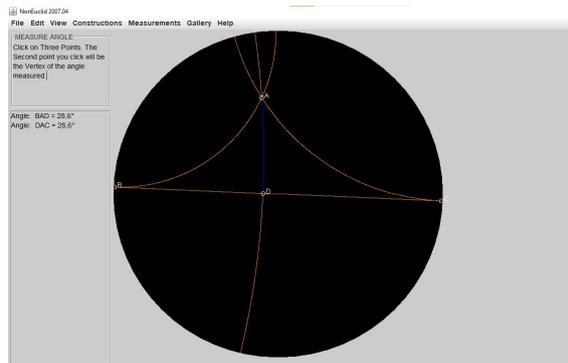


Figura 1: Retas paralelas. Fonte: dos autores.

Agradecimentos

Este trabalho é fruto do projeto de iniciação científica aprovado no EDITAL 10/2023 – PROPPI do IF Sudeste MG - Campus Juiz de Fora. Agradecemos à instituição pelo apoio e pelas bolsas concedidas.

Referências

- [1] E. Agustini. **Introdução à geometria hiperbólica plana**. FAMAT UFU; CEaD UFU, 2022.
- [2] J. L. M. Barbosa. **Geometria hiperbólica**. IMPA, 2002.
- [3] J. Castellanos, J. D. Austin e E. Darnell. **NonEuclid: Interactive Javascript Software for Creating Straightedge and Collapsible Compass Constructions in the Poincaré Disk Model of Hyperbolic Geometry**. Versão 1.0. 31 de mar. de 2022. URL: www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/.
- [4] M. J. Greenberg. **Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history**. Macmillan, 1993.
- [5] A. Staib. “Geometria Hiperbólica: uma proposta para o desenvolvimento de atividades utilizando o software livre NonEuclid”. Dissertação de mestrado. UNICAMP, Campinas/SP, 2010.