

# Heurísticas Espectrais aplicadas à Análise de Confiabilidade de Grafos

Carla Silva Oliveira<sup>1</sup>

ENCE/IBGE, Rio de Janeiro, RJ

Fausto Marques Pinheiro Junior<sup>2</sup>

IMECC/Unicamp, Campinas, SP

José André de Moura Brito<sup>3</sup>

ENCE/IBGE, Rio de Janeiro, RJ

## 1 Resumo

Grafos são objetos matemáticos que permitem modelar uma vasta gama de de aplicações reais. Um exemplo disso diz respeito à modelagem de uma rede de telecomunicações por grafos, o que permite investigar a sua robustez a partir da análise do impacto do desenho topológico utilizando diferentes medidas de robustez.

Dado um grafo simples conexo  $G$  que modela uma rede, definimos a sua confiabilidade como a probabilidade de  $G$  permanecer conexo após a remoção arbitrária de alguns de seus vértices e/ou arestas com probabilidade independente de remoção  $1 - p$ . Desde Moore & Shannon, o estudo da confiabilidade tem focado na confiabilidade de aresta, onde supõe-se que os vértices são perfeitamente confiáveis e as arestas são passíveis de remoção [4]. A partir de Goldschmidt, parte da literatura se volta para o estudo da confiabilidade de vértice, onde supõe-se que as arestas são perfeitamente confiáveis e os vértices são passíveis de remoção [2]. Em ambos os casos, determinar a confiabilidade de um grafo  $G$ , considerando todos os possíveis cenários de remoção de vértices ou arestas, corresponde a um problema NP-Difícil [5]. No caso da confiabilidade de vértice de  $G$ , o polinômio de confiabilidade de vértice,  $R_N(G, p)$ , é definido por:

$$R_N(G, p) = \sum_{r=1}^n S_r(G) p^r (1 - p)^{n-r}, \quad (1)$$

sendo  $S_r(G)$  correspondente ao número de subgrafos induzidos conexos de  $G$  que contêm, exatamente,  $r$  vértices e  $p$  é a probabilidade complementar de remoção de um vértice. Além disso, dada a complexidade, encontrar o polinômio de confiabilidade de vértice de  $G$  e de todos os supergrafos de  $G$  gerados pela inserção de uma única aresta é inviável na prática para muitas das redes reais de interesse. Logo, a identificação de alguma alteração topológica para o incremento da confiabilidade de muitos grafos é efetuada por meio de heurísticas ou simulações, ambas tendo por base propriedades topológicas e invariantes do grafo.

Neste trabalho abordou-se o problema de identificar as alterações topológicas que produzem o maior aumento de suas confiabilidades após a inserção de uma única aresta empregando apenas heurísticas. Mais especificamente, foram adaptadas para o contexto da confiabilidade de arestas duas heurísticas espectrais, quais sejam, a heurística  $\alpha$  e a heurística  $\varphi$ , relacionadas à conectividade

<sup>1</sup>carla.oliveira@ibge.gov.br

<sup>2</sup>fausto.mpj@protonmail.com

<sup>3</sup>jose.m.brito@ibge.gov.br

algébrica e ao vetor de Fiedler. Entretanto, propõe-se uma crítica dessas heurísticas e a investigação de sua motivação teórica e mecanismo operacional no contexto da confiabilidade de vértices. Ao todo, analisamos as seguintes heurísticas: **(a)** heurística do maior incremento da conectividade algébrica (heurística  $\alpha$ ); e **(b)** heurística da maior diferença absoluta entre as componentes do vetor de Fiedler (heurística  $\varphi$ ) [1]; **(c)** heurística de maximização da centralidade de intermediação (heurística  $\beta$ ); **(d)** heurística de maximização da centralidade de grau (heurística  $\gamma$ ); **(e)** heurística de minimização do diâmetro do grafo (heurística  $\delta$ ); **(f)** heurística de escolha aleatória (heurística  $r$ ).

Para comparar o desempenho das heurísticas com respeito a um grafo  $G$ , utilizou-se a métrica de índice de desvio relativo (RDI)[3]. Como função escore do RDI, utilizamos a integral definida no intervalo  $[0, 1]$  do polinômio de confiabilidade do supergrafo resultante da inserção de aresta indicada por cada heurística. Deste modo, quanto maior o valor do escore, mais confiável é o supergrafo. Aqui, o interesse ou objetivo não reside na comparação das heurísticas em um grafo  $G$  específico, mas em um grupo de grafos com características distintas. Destarte, foi empregado o índice de desvio relativo médio (RDIM) para comparar e avaliar os resultados das heurísticas quando aplicadas em um conjunto de grafos. Para isto, foram gerados um conjunto de 22000 grafos aleatórios de ordem entre 10 e 20, sendo, para cada ordem, 1000 pelo modelo Erdős-Rényi, 500 pelo modelo Barabási-Albert e 500 pelo modelo Watts-Strogatz. Independente do modelo utilizado para gerar o grafo, cada um é testado para verificar se atende aos requisitos de ser conexo, sem vértices de grau 1 e que não existam grafos isomorfos dentro da amostra. Isto porque, no caso dos vértices de grau 1, o maior incremento é trivialmente entre vértices de grau 1, e, no caso dos isomorfos, evitar que se contabilize múltiplas vezes uma mesma inserção.

Considerando estes dados, a heurística  $\varphi$  apresentou o melhor desempenho quanto ao RDIM e o menor desvio-padrão dos RDI dentre todas as heurísticas. Seguindo os critérios estabelecidos, temos que a Heurística  $\varphi$  é comparativamente melhor que as demais heurísticas testadas. Por fim, conjecturamos sobre os motivos teóricos para esse resultado com base nas propriedades dos modelos de grafos aleatórios empregados.

## Referências

- [1] M. Fiedler. “Algebraic connectivity of graphs”. Em: **Czechoslovak Mathematical Journal** 23.2 (1973), pp. 298–305. DOI: 10.21136/CMJ.1973.101168.
- [2] O. Goldschmidt, P. Jaillet e R. LaSota. “On reliability of graphs with node failures”. Em: **Networks** 24 (1994), pp. 251–259. DOI: 10.1002/net.3230240407.
- [3] Y.-D. Kim. “Heuristics for Flowshop Scheduling Problems Minimizing Mean Tardiness”. Em: **The Journal of the Operational Research Society** 44.1 (1993), pp. 19–28. DOI: 10.1057/jors.1993.3.
- [4] E. F. Moore e C. E. Shannon. “Reliable circuits using less reliable relays”. Em: **Journal of the Franklin Institute** 262.3 (1956), pp. 191–208. DOI: 10.1016/0016-0032(56)90044-8.
- [5] K. Sutner, A. Satyanarayana e C. Suffel. “The Complexity of the Residual Node Connectedness Reliability Problem”. Em: **SIAM J. Comput.** 20 (fev. de 1991), pp. 149–155. DOI: 10.1137/0220009.