

# Análise de dados do PIB per capita através da Modelagem Matemática aplicada ao Método Logístico

Sarah J. S. Silva<sup>1</sup>

IFSC, Tubarão, SC

Isnaldo I. Barbosa<sup>2</sup>

UFAL, Maceió, AL

Rafael L. Ludke<sup>3</sup>

IFSC, Caçador, SC

Essa pesquisa propôs a análise de dados do PIB per capita de Caçador para descrever o seu comportamento em função do tempo e da população. Realizamos modelagem matemática nos dados coletados do site oficial do IBGE do PIB per capita da cidade de Caçador-SC de 2010 a 2020 [3], em seguida utilizamos os métodos de Malthus, Verhulst e Montroll para realizar uma comparação dessas aproximações e verificar qual desses métodos está mais próximo do que seria a realidade desta cidade [1]. Modelamos os dados e encontramos uma equação para cada modelo e estudamos o comportamento da população através da curva logística determinada pela mesma, descrevendo de uma forma aproximada o comportamento dessa população. Diante dos métodos observou-se que:

O método Malthusiano considera que a população cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho conforme a equação

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (1)$$

Resolvendo a equação diferencial 1 obtemos a seguinte equação

$$P(t) = P_0 e^{kt} \quad (2)$$

Para conseguir resolver o problema e esboçar a curva logística é necessário descobrir o valor da constante  $k$ , dessa forma, tome  $\beta = k, \beta = \ln(1 + \alpha)$  onde

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{P(t)}{P_0}} \quad (3)$$

Já o método de Verhulst é uma forma aprimorada do método de Malthus para descrever o comportamento de populações que inclui um limitador e com isso o crescimento populacional tem uma capacidade máxima. Assim,

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right) \quad (4)$$

Resolvendo a equação diferencial 4 obtemos a seguinte equação

---

<sup>1</sup>sarah.souza@ifsc.edu.br

<sup>2</sup>isnaldo@pos.mat.ufal.br

<sup>3</sup>rafaelctu4710@gmail.com

$$P(t) = \frac{k}{1 + ce^{-rt}} \tag{5}$$

Onde

$$c = \frac{k - P_0}{P_0} \tag{6}$$

E, o modelo de Montroll é derivado do modelo de Verhulst, porém nele o crescimento populacional não é linear e possui um ponto de inflexão na curva. Este modelo pode ser aplicado a outros fenômenos ajustando  $\alpha$  que é o ponto de inflexão. Assim a equação de Montroll é dada por

$$\frac{dP}{dt} = rP\left[1 - \left(\frac{P}{k}\right)^\alpha\right] \tag{7}$$

Resolvendo a equação diferencial 7 obtemos a seguinte equação

$$P(t) = \frac{P_0 k}{[P_0 + (k - P_0)e^{-at}]^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{8}$$

Comparando os dados aplicados a cada um dos modelos, constatamos que o método de Malthus é o modelo que melhor descreve o fenômeno estudado, pois os valores ficaram mais próximos dos dados reais. Dessa forma, é o cálculo que apresenta o menor erro absoluto, como pode ser visto nos cálculos representados na figura 1.

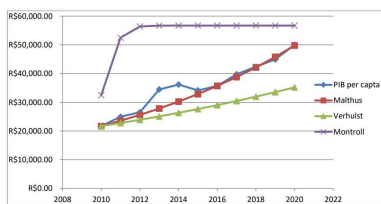


Figura 1: Comparação da representação de todas as curvas logísticas. Fonte: dos autores.

A análise dos resultados indica que o método de Malthus é o que melhor descreve o fenômeno estudado. Além disso, esses métodos podem ser aplicados a outros fenômenos, não se limitando apenas às taxas de crescimento populacional. A modelagem matemática desenvolvida neste trabalho convida à reflexão sobre práticas pedagógicas que favorecem o ensino-aprendizagem, destacando a importância da modelagem como uma metodologia facilitadora. Mostra-se, assim, que a matemática, por meio da modelagem, pode dialogar com outras áreas do conhecimento [2, 4].

## Referências

- [1] R. C. Bassanezi. **Modelagem matemática como metodologia de ensino de matemática**. IN: VII CIAEM. Santiago: Contexto, 1987.
- [2] M. S. Biembengut. **Modelagem matemática e implicações no ensino e aprendizagem de Matemática**. 2. ed. Blumenau: Edfurub, 2004.
- [3] IBGE. **Produto Interno Bruto do Município de Caçador**. Online. Acessado em 24/05/2023, <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/sc/cacador/pesquisa/38/0>.
- [4] S. J. S. Silva. **Modelagem Matemática aplicado a Engenharia de Produção: Proposta metodológica para o ensino e aprendizagem de Matemática do ensino médio integrado**. Dissertação de mestrado - PROFMAT. 2023. Acessado em 20/02/2024.