Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Desenvolvimento de Applet no GeoGebra para Auxílio no Ensino de Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Arlyson A. do Nascimento[1], Alisson M. Gonçalves[2], Jonathan W. L. de A. Lima[3], Cíntia T. de Melo[4]
IFAL, Maceió, AL

A matemática discreta está presente em vários cenários do nosso dia a dia e em inúmeras áreas tais como a teoria dos jogos, das filas, dos grafos, na criptografia, otimização linear, entre outros campos [2].

Nesse sentido, o objetivo deste trabalho é apresentar os resultados parciais de um projeto de iniciação tecnológica que visa a criação de um material didático online e interativo para auxílio no processo de ensino e aprendizagem das equações discretas. A teoria sobre esse conteúdo está sendo desenvolvida no ambiente virtual Notion, disponível em `https://bit.ly/equacoesderecorrencias`. O *applet* inicialmente foi desenvolvido no *software* GeoGebra e está disponível em `https://www.geogebra.org/m/pk34rvvk`.

Neste trabalho iremos abordar as recorrências lineares de primeira ordem. Desse modo, de acordo com [3], uma recorrência linear de 1ª ordem expressa x_{n+1} em função de x_n, será linear se, e somente se, sua equação for da forma:

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n), \quad \text{com} \quad g(n) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Uma equação simples relacionando gerações sucessivas de uma população de células é dada por

$$M_{n+1} = a \cdot M_n, \tag{1}$$

em que a representa as células-filhas produzidas por cada membro, e $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sendo o número de células na primeira, segunda e n-ésima geração, respectivamente [1, tradução nossa].

Para a n-ésima geração, temos a seguinte expressão:

$$M_n = a^n M_0.$$

Observe que a magnitude de a determinará se a população cresce ou diminui com o tempo, ou seja, se $|a| > 1$, M_n aumenta, caso $|a| < 1$, M_n diminui, e se $a = 1$, M_n é constante.

Vamos supor que temos uma população de bactérias que cresce em uma cultura de laboratório sob condições ideais, em que a cada geração o número de bactérias duplica. Se inicialmente tivermos 100 bactérias, determine a quantidade de bactérias quando $n = 2$.

Se essas bactérias duplicam a cada número de geração e a população inicial é igual a 100, temos que $a = 2$ e $M_0 = 100$. Ao fazer a substituição na equação (1), ficaremos com o seguinte resultado:

$$M_{n+1} = 2 \cdot M_n. \tag{2}$$

Para sabermos a quantidade de bactérias quando $n = 2$, iremos precisar também da quantidade quando $n = 0$ e $n = 1$. Desse modo, temos:

[1] arlyson.nascimento@ifal.edu.br
[2] amg2@aluno.ifal.edu.br
[3] jonathamateriais@gmail.com
[4] ctm2@aluno.ifal.edu.br

Para $n = 0$:

$$\begin{aligned} M_{0+1} &= 2 \cdot M_0 \\ M_1 &= 2 \cdot M_0 \\ M_1 &= 200. \end{aligned}$$

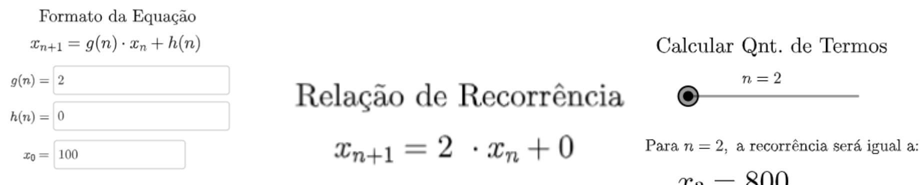
Para $n = 1$:

$$\begin{aligned} M_{1+1} &= 2 \cdot M_1 \\ M_2 &= 2 \cdot 200 \\ M_2 &= 400. \end{aligned}$$

Para $n = 2$:

$$\begin{aligned} M_{2+1} &= 2 \cdot M_2 \\ M_3 &= 2 \cdot 400 \\ M_3 &= 800 \end{aligned}$$

Desse modo, após duas gerações, temos a quantidade de 800 bactérias dentro desse laboratório. Na Figura 1 temos o *applet* com os dados do exemplo feito anteriormente. Ele foi criado a partir desse problema, mas pode ser trabalhado com outros exemplos que envolvam recorrências lineares de primeira ordem.



(a) Campos de entrada (b) Recorrência após os dados inseridos (c) Cálculo para $n = 2$

Figura 1: Parâmetros preenchidos e cálculo para $n = 2$. Fonte: dos autores

Nesse sentido, é possível observar que a recorrência da Figura 1b é semelhante à equação (2), e o resultado para $n = 2$ coincide com o que calculamos de forma algébrica, isto é, equivale a 800, nesse caso, bactérias.

Assim, a partir desse *applet*, estudantes e professores podem testar diferentes hipóteses para a quantidade inicial de bactérias (x_0), para a quantidade de células-filhas produzidas por cada membro ($g(n)$) e verificar a quantidade de bactérias após n gerações. Em outros problemas que envolvam recorrências lineares de primeira ordem, eles podem alterar os parâmetros e ir modificando o valor de n para verificar o que acontece com os pontos que vão sendo traçados à medida que n aumenta, tendo, assim, um retorno imediato, ao passo que feito de forma algébrica leva um tempo maior.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo auxílio financeiro no projeto que visa o desenvolvimento do material tratato neste trabalho.

Referências

[1] L. Edelstein-Keshet. “The Theory of Linear Difference Equations Applied to Population Growth”. Em: **Mathematical Models in Biology**. Cap. 1, pp. 3–38. DOI: `10.1137/1.9780898719147.ch1`.

[2] J. A. Salvador e S. H. de V. Arenales. **Modelagem Matemática Ambiental**. 1a. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2021. ISBN: 9786586768282.

[3] I. C. da Silva. “Recorrências: uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no Ensino Médio”. Dissertação de mestrado. Universidade de Brasília, 2015.

