Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo Sobre as Correlações Entre Estados em Modelos de Transmissão em Grafos Finitos

Júnior, L.S.M.[1] Rodriguez, P.M.[2]
UFPE, Recife, PE
Arruda, G. F[3]
CENTAI, Torino, Itália

A exploração de modelos teóricos de transmissão desperta o interesse de pesquisadores(as) em diversas disciplinas, incluindo Física, Computação, Matemática, Estatística, entre outras. Além de sua relevância do ponto de vista científico, esses modelos desempenham um papel crucial como ferramentas valiosas para o setor público, proporcionando suporte na tomada de decisões em situações que demandam previsões, como no caso do alastramento de patógenos em uma população.

A literatura da Física constitui uma parte significativa do estudo desses processos. Os argumentos frequentemente empregados derivam de investigações realizadas por meio de simulações computacionais ou de aproximações das trajetórias do processo estocástico original por meio de equações obtidas através de campo-médio [7]. Esta última abordagem parte da premissa de que os estados entre diferentes vértices são variáveis aleatórias não correlacionadas. No entanto, [1] recentemente apontou que, para os modelos epidêmicos SIS e SIR, as respectivas variáveis aleatórias apresentam correlação não-negativa. Importante notar que [5] apresentou um contraexemplo aos argumentos que supostamente demonstravam tal correlação não-negativa no modelo SIR.

Dada a similaridade de comportamento entre os modelos de epidemias e os modelos de rumores, a persistência dessa questão como um problema em aberto permanece evidente. Para aprofundar na compreensão do problema, neste trabalho, foram estudados os argumentos nas referências [1, 5]. Inicialmente, a análise concentrou-se nos argumentos de [1] para o modelo SIS, envolvendo a aplicação da desigualdade *Fortuin – Kasteleyn – Ginibre* (FKG) [2–4] para demonstrar que as variáveis de interesse têm correlação não negativa. Ou seja, para todo $t \geq 0$ e todo vértice i do grafo, foi verificado que:

$$\mathbb{E}(X_i(t)X_j(t)) \geq \mathbb{E}(X_i(t))\mathbb{E}(X_j(t)), \tag{1}$$

em que a variável aleatória $X_i(t)$ é igual a 1, se o vértice i estiver infectado no instante t, ou é igual a zero caso contrário. No entanto, para o modelo SIR, [5] demonstrou que a desigualdade não se verifica a partir da construção apresentada por [1]. Para avaliar a validade da desigualdade representada em (1), realizou-se um estudo por meio de simulações computacionais para as dinâmicas dos modelos SIR e SIS em grafos finitos específicos. Nesse contexto, a abordagem adotada envolveu a fixação de dois vértices, i e j, que são vizinhos. Ao longo de um intervalo de tempo predefinido $[t_{in}, t_{fn}]$, os estados dos vértices i e j em cada transição foram computados, assim como o tempo que permaneceram em cada estado. Dado que as transições ocorrem em intervalos de tempo de comprimentos distintos, a expressão para a covariância entre i e j foi formulada como:

[1]luciano.mendesjunior@ufpe.br
[2]pablo@de.ufpe.br
[3]gui.f.arruda@gmail.com

$$COV(X_n^i, X_n^j) \quad = \quad \frac{\sum\limits_{n=0}^{N} X_n^i X_n^j \Delta t_{n-1}}{\sum\limits_{n=0}^{N} \Delta t_n} - \left(\frac{\sum\limits_{n=0}^{N} X_n^i \Delta t_{n-1}}{\sum\limits_{n=0}^{N} \Delta t_n} \right) \left(\frac{\sum\limits_{n=0}^{N} X_n^j \Delta t_{n-1}}{\sum\limits_{n=0}^{N} \Delta t_n} \right), \tag{2}$$

em que, na Equação (2), a variável aleatória X_n^i representa o estado do vértice i em sua n-ésima transição, e Δt_n denota o intervalo de tempo dessa mesma transição. Por meio de simulações, obtivemos as curvas de covariância da Equação (2) em relação ao tamanho do grafo para os modelos SIS e SIR, respectivamente.

Conforme esperado para o modelo SIS em um grafo completo [6], a covariância entre dois vértices vizinhos tendeu a zero superiormente à medida que o tamanho do grafo aumentou, corroborando a validação da Equação (1). Observamos que o modelo SIR também exibiu esse mesmo comportamento, indicando uma convergência consistente.

No entanto, esse padrão não foi verificado para o modelo SIR em um grafo composto por duas estrelas conectadas pelos seus centros. Este resultado fortalece os argumentos levantados por [5], que evidenciou que a construção proposta por [1] não é consistente para o modelo SIR. Diante desse cenário, ressalta-se que a demonstração formal do comportamento positivo das covariâncias no modelo SIR permanece uma questão em aberto, que deve continuar sendo investigada e aprofundada.

Agradecimentos

Expresso minha sincera gratidão à FACEPE pelo apoio financeiro providenciado durante o desenvolvimento do meu trabalho de mestrado, cujos desdobramentos se refletem no presente trabalho.

Referências

[1] Eric Cator e Piet Van Mieghem. “Nodal infection in Markovian susceptible-infected-susceptible and susceptible-infected-removed epidemics on networks are non-negatively correlated”. Em: **Physical Review E** 89.5 (2014), p. 052802.

[2] Cees M Fortuin, Pieter W Kasteleyn e Jean Ginibre. “Correlation inequalities on some partially ordered sets”. Em: **Communications in Mathematical Physics** 22.2 (1971), pp. 89–103.

[3] Geoffrey Grimmett. **Probability on Graphs: Random Processes on Graphs and Lattices**. 2ª ed. Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press, 2018. DOI: 10.1017/9781108528986.

[4] Richard Holley. “Remarks on the FKG inequalities”. Em: **Communications in Mathematical Physics** 36.3 (1974), pp. 227–231.

[5] Pablo M Rodriguez, Alejandro Roldán-Correa e Leon Alexander Valencia. “Comment on “Nodal infection in Markovian susceptible-infected-susceptible and susceptible-infected-removed epidemics on networks are non-negatively correlated””. Em: **Physical Review E** 98.2 (2018), p. 026301.

[6] J Plınio O Santos, Margarida P Mello e Idani TC Murari. **Introdução à análise combinatória**. Unicamp, 1995.

[7] Tânia Tomé. **Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade Vol. 35**. Edusp, 2001.