Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

HEMODAXIS1D - Um Programa de Hemodinâmica para calcular o Campo de Velocidades numa Artéria Axissimétrica

Hádrian G. da R. Santos[1]
DMEC/UFS, São Cristóvão, SE
Álvaro H. C. Lisboa[2]
DMA/UFS, São Cristóvão, SE
Maria S. F. Nunes[3]
DME/UFS, Aracaju, SE
Juliana L. dos Santos[4]
DME/UFS, Aracaju, SE
David S. P. Júnior[5]
DMA/UFS, São Cristóvão, SE

Neste trabalho, um modelo analítico para o campo de velocidades, deduzido das Equações Diferenciais de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas, é aplicado para construir a discretização por diferenças finitas de uma artéria finita, rigída e axissimétrica com a qual é determinado o campo $\vec{v} = \vec{v}(r,z,t) = v_r(r,z,t)\,\vec{i_r} + v_z(r,z,t)\,\vec{i_z}$, em que r é a variável radial, z é a variável coaxial com o eixo central da artéria e t é a variável temporal conforme as equações em [3]:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\,\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\,\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right] + \rho g_r \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\,\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\,\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] + \rho g_z, \tag{2}$$

em que ρ e μ são a densidade e a viscosidade sanguíneas, $\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$ é o gradiente de pressão aplicado e $\vec{g} = (g_r, g_z)$ é o campo gravitacional. Neste modelo discreto-computacional, o campo de velocidades na artéria é calculado utilizando valores fisiológicos reais para a viscosidade e densidade sanguíneas e para os parâmetros geométricos da artéria, tais como R_a (raio da artéria) e ℓ_a (comprimento da artéria).

Neste modelo matemático, por hipótese, são assumidos: a) a axissimetria da artéria rígida, cilíndrica com $R_a \ll \ell_a$; b) independência angular do campo de velocidades $\vec{v}$; c) a predominância do momento linear na direção z com $v_r \ll v_z$.

Simbolicamente, o modelo hemodinâmico é governado pelo problema de valor de contorno e

[1]hadrianrocha@hotmail.com
[2]alvaro3@academico.ufs.br
[3]msabrinafn@gmail.com
[4]julianalimamed@outlook.com
[5]davidx@academico.ufs.br

inicial [2]:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{F}(\vec{v}(r,z,t)), \forall t > 0, \forall (r,z) \in \Omega_a, \\ \\ \vec{v}(r,z,0) = \vec{V_0}(r,z), \forall (r,z) \in \overline{\Omega}_a, \\ \\ \vec{v}(r,z,t)\big|_{\partial\Omega_a} = \vec{q_0}(r,z,t), \forall t \geq 0, \forall (r,z) \in \partial\Omega_a, \end{array}\right. \tag{3}$$

em que $\vec{V_0}$ é a condição inicial prescrita e $\vec{q_0}$ é a condição de contorno prescrita, $\overline{\Omega}_a = [0, R_a] \times [0, \ell_a]$ e $\partial\Omega_a$ é o contorno lateral da artéria.

Para a simulação do fluxo sanguíneo na artéria são aplicadas as condições de contorno e iniciais [2]:

$$\left|\begin{array}{l} v_r = 0, v_z = V_0\left(1 - \frac{r^2}{{R_a}^2}\right), z = 0, 0 \leq r \leq R_a, \forall t \geq 0, V_0 = 0.66\, m/s \\ \\ v_r = 0, \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, 0 \leq r \leq R_a, z = \ell_a, \forall t \geq 0, R_a = 1.2\, cm, \ell_a = 20\, cm, \\ \\ v_r = 0, v_z = 0, r = R_a, 0 \leq z \leq \ell_a, \forall t \geq 0, \\ \\ v_r = 0, v_z = 0, 0 < r < R_a, 0 < z < \ell_a, t = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

É importante notar que a implementação computacional das equações de diferenças finitas associadas ao problema de valor de contorno e inicial, posto e governado pelo modelo analítico, segue-se da variação incremental temporal e espacial sobre o campo de velocidades discretas $\vec{v}^{n}_{i,j} = \vec{v}(r_i, z_j, t_n)$ num ponto genérico (r_i, z_j, t_n):

$$\begin{cases} \vec{v}^{n+1}_{i,j} = \vec{v}^{n}_{i,j} + \vec{F}(\vec{v}^{n}_{i,j}) \cdot \Delta t; \\ \\ n = 0, 1, 2, 3, ..., n_t; i = 0, 1, 2, 3, ..., n_r;\ j = 0, 1, 2, 3..., n_z, \end{cases} \tag{5}$$

em que Δt é o incremento temporal, n_t é o número de divisões temporais, n_r é o número de divisões radiais e n_z é o número de divisões coaxiais.

Uma simulação típica do fluxo sanguíneo com dados fisiológicos, humanos, reais será apresentada e a descrição do programa será discutida, evidenciando sua simplicidade.

O modelo discreto implementado é versátil, sendo possível estendê-lo para o fluxo sanguíneo numa artéria com estenose ou aneurisma [1].

Agradecimentos

Os ligantes da XMAM - Liga Acadêmica de Matemática Aplicada à Medicina/DMA/UFS agradecem ao Professor Titular David Soares pela orientação.

Referências

[1] D. S. Pinto Jr. **Noções da Teoria Matemática do Método de Elementos Finitos na Engenharia Estrutural**. 1a. ed. Sergipe: Criação Editora, 2022. ISBN: 9788584132621.

[2] D. S. Pinto Jr. **Soluções em Série e Soluções Integrais de Equações Diferenciais Parciais Clássicas**. Editora Criação, 2014.

[3] D. S. Pinto Jr., H. G. Da Rocha Santos e P. L. M. Soares Souza. “Solução analítica do fluxo sanguíneo de Womersley 1D”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2021, pp. 010297-1–2.